دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی محض، گرایش منطق ریاضی

عنوان

شرط لازم وکافی برای تصمیم‌ناپذیری جمله گودل و درستی آن

استاد راهنما

دکتر سعید صالحی‌پورمهر

استاد مشاور

دکتر هژیر حومئی

پژوهشگر

یوسف نوبخت

بهمن ۱۳۹۶

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

معلمان دیروز و امروزم،

پدر و مادر مهربانم که تمام لحظات زندگی ام را مدیون زحمات بی دریغ و پر مهرشان می باشم،

برادران و خواهر عزیزتر از جانم که موفقیت و سلامتی شان را از خداوند مهربان خواهانم،

و همه ی کسانی که در قلب من جای دارند.

بنام خدا

و من لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان‌نامه را به پایان برسانم، امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه انسانیت مورد استفاده قرار دهم.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه

- از استاد راهنمای مشفق و گرامی خود، جناب آقای دکتر سعید صالحی‌پورمهر که راهنمایی‌های ایشان همواره روشنگر راهم بوده و علی‌رغم زحمات بسیار از طرف بنده، با رویی گشاده و محبتی معلم‌گونه پذیرای من بوده‌اند صمیمانه قدردانی و تشکر می‌نمایم؛

- از جناب آقای دکتر هژیر حومئی به عنوان استاد مشاورم که با نظرات ارزشمندشان اینجانب را در انجام این پایان‌نامه یاری نمودند، سپاس‌گذاری می‌کنم؛

- از جناب آقای دکتر جعفرصادق عیوضلو، استاد داور این پایان‌نامه، به خاطر لطف و محبت ایشان نسبت به بنده حقیر در طول دوره کارشناسی ارشد و همچنین تقبل زحمت داوری این پایان‌نامه کمال تشکر را دارم؛

- در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم وبعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران و خواهر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

یوسف نوبخت

بهمن ۱۳۹۶

نام خانوادگی دانشجو: نوبخت نام: یوسف
عنوان: شرط لازم وکافی برای تصمیم‌ناپذیری جمله گودل و درستی آن
استاد راهنما : دکتر سعید صالحی‌پورمهر استاد مشاور : دکتر هژیر حومئی
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: منطق ریاضی دانشگاه تبریز دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۱۳۹۶ تعداد صفحات: ۶۵
کلید واژه‌ها: تصمیم‌ناپذیری، جمله گودل، ناتمامیت گودل، سازگاری، لم قطری‌سازی، ω–سازگاری، n–سازگاری

چکیده

در این پایان‌نامه رابطه‌ی بین درستی، ω–سازگاری، 1–سازگاری و شرایط بین آن‌ها تجزیه و تحلیل شده‌اند. مشاهده می‌شود که یک شرط لازم و کافی برای استقلال جمله گودل از نظریه، سازگاری آن نظریه با جمله‌ی سازگاری خودش است. این شرط اکیداً ضعیف‌تر از 1–سازگاری است. همچنین در مورد شرایطی که درستی جملات گودل را می‌توان دید بحث شده است. این پایان‌نامه بر اساس مقالات زیر تهیه و تنظیم شده است:

[1] George Boolos, *On "seeing" the truth of Gödel sentence,* Behavioral and Brain Sciences, Volume 13, Issue 4 (1990), pp. 655–656, https://doi.org/10.1017/S0140525X00080687.

[2] Daniel Isaacson, *Necessary and Sufficient Conditions for Undecidability of the Gödel Sentence and its Truth,* D. DeVidi et al. (eds.), Logic, Mathematics, Philosophy: Vintage Enthusiasms, Springer (2011) pages 135-152, https://doi.org/10.1007/978-94-007-0214-1_7.

فهرست مطالب

مقدمه

کورت گودل[۱] (۷۸–۱۹۰۶) در برنوی اتریش، که اکنون در جمهوری چک واقع است، به دنیا آمد. دکترای خود را در ۱۹۳۰ از دانشگاه وین دریافت کرد. رساله‌ی دکترای او در مورد تمامیت منطق مرتبه اول بود. مقاله معروف ناتمامیت او در سال ۱۹۳۱، نشان داد که هر اصل‌بندی بازگشتی ω–سازگار حساب پئانو، شامل جملاتی است که به‌طور صوری تصمیم‌ناپذیرند، یعنی نه قابل اثبات‌اند و نه قابل رد شدن. راسر[۲] در سال ۱۹۳۶ نشان داد که شرط ω–سازگاری را می‌توان به سازگاری تقلیل داد. یکی از این جملات تصمیم‌ناپذیر، سازگاری خود نظریه است. با این قضیه‌ی انقلابی، برنامه هیلبرت[۳] برای تحویل سازگاری حساب به دستگاه‌های ضعیف‌تر، به شکست انجامید [۱۱].

گودل در مقاله‌اش موفق به اثبات دو قضیه مهم در حوزه منطق ریاضی گشت، که به قضایای ناتمامیت معروف شده‌اند. این قضایا معمولاً به عنوان مهمترین دست‌آورد تاریخ منطق به حساب می‌آیند. اما این قضایا از چه سخن می‌گویند؟ به طور کلی می‌توان گفت این قضایا به ذکر ویژگی‌هایی از یک نظام صوری به اندازه کافی قوی که شامل حساب مقدماتی اعداد بشود، برای مثال PA، می‌پردازند. در قضیه اول به جمله‌ای در دستگاه‌های صوری اشاره می‌شود که هر چند صادق است، قابل اثبات نیست؛ به شرط آن که دستگاه صوری سازگار باشد. در قضیه دوم اثبات‌ناپذیری سازگاری نظام صوری مورد بحث در

[۱] K. Gödel

[۲] J. B. Rosser

[۳] D. Hilbert

خود دستگاه، اثبات می‌شود. گودل دستگاه صوری اصل موضوعی شده‌ای مانند S را در نظر گرفت که سازگار بوده و به اندازه کافی برای بیان حساب مقدماتی اعداد قوی باشد (گودل خود دستگاه صوری اصول ریاضی وایتهد[۴] و راسل[۵] را مد نظر داشت). سپس با الهام از جملات خودارجاعی مانند جمله‌ی دروغ‌گوی «این جمله کاذب است» به ساخت جمله «من اثبات‌ناپذیرم» پرداخت.

حال به عنوان یک بررسی غیررسمی، اگر جمله گودل S، (G_S)، در S اثبات‌پذیر باشد، از آن جا که S سازگار است، بنابراین باید G_S صادق باشد؛ یعنی «من اثبات‌ناپذیرم» صادق است و این با اثبات‌پذیری آن در تناقض قرار میگیرد. اما اگر جمله G_S در S اثبات‌ناپذیر باشد، آن گاه از آن جا که خود نیز به اثبات‌ناپذیری خود اذعان میکند G_S صادق خواهد بود. از آن جا که برای صدق جمله G_S سازگاری این نظام را مفروض گرفتیم، می‌توانیم جمله اثبات‌شده توسط این نظام را با $\mathrm{Cons} \to G_S$ نمایش دهیم. از طرف دیگر، اگر $\neg G_S$ از این دستگاه اثبات‌پذیر باشد، آن گاه با قانون رفع تالی به ناسازگاری این دستگاه می‌رسیم ($\neg\mathrm{Cons}$)، که با فرض سازگاری دستگاه در تناقض است. پس در دستگاه S هیچ یک از دو جمله G_S و $\neg G_S$ اثبات‌پذیر نیستند. این نتیجه قضیه اول ناتمامیت گودل است. ازاین قضیه می‌توان نتیجه گرفت که Cons نیز اثبات‌پذیر نیست. زیرا اگر فرض کنیم Cons در S اثبات‌پذیر است، آنگاه با اعمال قاعده وضع مقدم G_S نیز باید در S اثبات‌پذیر باشد، در حالی که یکی از نتایج قضیه اول ناتمامیت این بود که G_S و $\neg G_S$ در S اثبات‌پذیر نیستند. پس Cons در S اثبات‌پذیر نیست (قضیه دوم ناتمامیت گودل) [۱۲].

[۴] A.N. Whitehead

[۵] B. Russell

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

هدف از نگارش این فصل، معرفی مختصر منطق مرتبه اول، چگونگی استنتاج در آن و بیان مقدمات لازم برای فصل‌های سوم و چهارم می‌باشد. بیشتر قضیه‌های این فصل به دلیل شهرت آن‌ها و پیشگیری از طولانی شدن بحث بدون برهان بیان شده‌اند. همچنین توضیحی مختصر در مورد چگونگی حسابی‌سازی نحو توسط گودل ارایه شده است.

۱.۱ منطق مرتبه اول

برای صحبت کردن درباره یک منطق و مدل کردن آن به زبان ریاضی، نیاز به یک زبان است. یک زبان مانند $\mathcal{L}$ برای منطق مرتبه اول شامل نمادهای زیر است:

۱. نمادهای رابطی (ادوات منطقی) $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$؛

۲. سورها $\{\forall, \exists\}$؛

۳. مجموعه‌ای شمارا از متغیرها $\{x_1, x_2, \cdots\}$؛

۴. پرانتزها $\{(,)\}$؛

۵. یک مجموعه حداکثر شمارا از نمادهای محمولی (به هر محمول مانند P یک عدد نسبت داده می‌شود و اگر به محمول P عدد $n \geqslant 1$ نسبت داده شده باشد گوییم P یک محمول $n-$ موضعی است)؛

۶. یک مجموعه حداکثر شمارا از نمادهای ثابتی؛

۷. یک مجموعه حداکثر شمارا از نمادهای تابعی (به هر نماد تابعی مانند f یک عدد نسبت داده می‌شود و اگر به نماد تابعی f عدد $n \geqslant 0$ نسبت داده شده باشد گوییم f یک تابع $n-$ موضعی است).

تعریف ۱.۱.۱ (ترم). مجموعه همه ترم‌ها در زبان $\mathcal{L}$، که با نماد $TERM$ نشان داده می‌شود، کوچک‌ترین مجموعه‌ای است که شامل موارد زیر باشد:

۱. تمامی ثابت‌ها و متغیرها؛

۲. اگر $t_1, \cdots, t_n \in TERM$ و f یک نماد تابعی $n-$ موضعی باشد آنگاه $f(t_1, \cdots, t_n)$ یک ترم است.

تعریف ۲.۱.۱ (فرمول‌های اتمی). فرمول‌های اتمی یک زبان مرتبه اول $\mathcal{L}$، عبارت‌هایی به شکل $R(t_1, \cdots, t_n)$ هستند که در آن R یک نماد محمولی $n-$موضعی $\mathcal{L}$ است و $t_1, \cdots, t_n$ ترم هستند.

تعریف ۳.۱.۱ (فرمول مرتبه اول). مجموعه تمام فرمول‌ها که با FRM نشان داده می‌شود، به صورت بازگشتی تعریف می‌شوند:

۱. هر فرمول اتمی $\mathcal{L}$، یک $\mathcal{L}-$فرمول است؛

۲. اگر φ و ψ دو $\mathcal{L}-$فرمول باشند، آنگاه موارد زیر نیز $\mathcal{L}-$فرمول هستند:

$((\exists x_i)\varphi)$ ،$((\forall x_i)\varphi)$ ،$(\varphi \to \psi)$ ،$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ ،$(\varphi \wedge \psi)$ ،$(\varphi \vee \psi)$ ،$(\neg\varphi)$.

تعریف ۴.۱.۱. در فرمول $(Qx_i)\alpha$ (جاییکه $Q \in \{\forall, \exists\}$ یک سور است)، α را دامنه عمل سور Qx_i گویند. یک رخ‌داد متغیر x_i در فرمول را آزاد گوییم، هرگاه آن رخ‌داد در دامنه عمل یک سور $\forall x_i$ یا $\exists x_i$ قرار نداشته باشد، در غیر اینصورت آن را محدود نامیم. گوییم x_i یک متغیر آزاد فرمول φ است هرگاه x_i حداقل یک رخ‌داد آزاد در φ داشته باشد. مجموعه متغیرهای آزاد φ را با $FV(\varphi)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱.۱ (جمله). یک فرمول مرتبه اول را جمله نامیم هرگاه هیچ متغیر آزادی نداشته باشد.

مثال ۶.۱.۱ (برخی قوانین منطق سورها). اگر φ، ψ و θ فرمول‌های مرتبه اولی باشند که متغیر x در فرمول φ آزاد نباشد، آنگاه فرمول‌های زیر منطقا معتبر هستند:

$$\forall x \forall y \psi \leftrightarrow \forall y \forall x \psi \tag{۱.۱}$$

$$\exists x \exists y \psi \leftrightarrow \exists y \exists x \psi \tag{۲.۱}$$

$$\forall x(\theta \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x\theta) \wedge (\forall x\psi) \tag{۳.۱}$$

$$\exists x(\theta \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x\theta) \vee (\exists x\psi) \tag{۴.۱}$$

$$\neg\forall x\psi \leftrightarrow \exists x\neg\psi \tag{۵.۱}$$

$$\neg\exists x\psi \leftrightarrow \forall x\neg\psi \qquad (۶.۱)$$

$$\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi \qquad (۷.۱)$$

$$\exists x\varphi \leftrightarrow \varphi \qquad (۸.۱)$$

$$\forall x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \varphi \vee \forall x\psi \qquad (۹.۱)$$

$$\exists x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \varphi \wedge \exists x\psi \qquad (۱۰.۱)$$

$$\forall x(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi \to \forall x\psi) \qquad (۱۱.۱)$$

روش و دستگاه اصل موضوعی

این روش که به بنیان‌گزاران منطق جدید برمی‌گردد و به روش هیلبرت معروف است، از تعدادی اصل موضوعه و یک قاعده استنتاج تشکیل شده است. روش‌های مختلفی برای بیان اصول موضوعه روش هیلبرت وجود دارد؛ آنچه ما در اینجا آورده‌ایم برگرفته از [۸] است.

اصول موضوعه و قواعد منطق گزاره‌ها در دستگاه هیلبرت (H):

(الف) اصول موضوعه:

$$Ax_1: \qquad \forall x\big(\varphi \to (\psi \to \varphi)\big)$$

$$Ax_2: \qquad \forall x\Big(\big(\varphi \to (\psi \to \theta)\big) \to \big((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta)\big)\Big)$$

$$Ax_3: \qquad \forall x\big((\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)\big)$$

اگر $\varphi(x/t)$ فرمول حاصل از جایگزینی ترم t به جای متغیر x در فرمول φ باشد آنگاه

$$Ax_4: \qquad \forall x\varphi \to \varphi(x/t)$$

$$Ax_5: \quad (\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$$

اگر متغیر x در φ آزاد نباشد آنگاه

$$Ax_6: \quad \varphi \to \forall x\varphi$$

(ب) قاعده استنتاج:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\ (MP)$$

در منطق سنتی به این قاعده قیاس استثنایی می‌گویند که البته بیشتر به قاعده وضع مقدم[۱] معروف است.

تعریف ۷.۱.۱ (استنتاج مرتبه اول). فرض کنید Γ یک مجموعه از $\mathcal{L}$–فرمول‌ها و φ نیز یک $\mathcal{L}$–فرمول باشد. گوییم Γ، φ را اثبات می‌کند (یا φ یک نتیجه منطقی Γ است) هرگاه دنباله‌ای از $\mathcal{L}$–فرمول‌ها مانند $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n = \varphi$ موجود باشد به‌طوری‌که هر φ_i در حداقل یکی از شرایط زیر صدق کند:

(الف) φ_i یک اصل موضوع H است؛

(ب) φ_i عضوی از Γ است؛

(پ) φ_i از دو عضو قبلی دنباله بنابه قاعده وضع مقدم به دست آمده است.

در اینصورت می‌نویسیم $\Gamma \vdash \varphi$ و دنباله فوق را یک استنتاج φ از Γ گوییم. اگر $\emptyset \vdash \varphi$ آنگاه می‌نویسیم $\vdash \varphi$ و گوییم φ یک قضیه دستگاه H است. در ضمن، هر استنتاج φ از $\emptyset$ را یک برهان φ نامیم.

قضیه ۸.۱.۱ (استنتاج (DT)). *برای نظریه Γ و فرمول‌های φ و ψ، اگر $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ آنگاه $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.*

قضیه ۹.۱.۱ (قاعده تراگذاری). *اگر $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ و $\Gamma \vdash \psi \to \theta$، آنگاه $\Gamma \vdash \varphi \to \theta$.*

قضیه ۱۰.۱.۱ (قاعده تعمیم). *اگر متغیر x در نظریه Γ آزاد نباشد و $\Gamma \vdash \varphi$ آنگاه $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.*

[۱] Modus Ponens

۲.۱ حساب پئانو

نظریه حساب پئانو را با نماد PA نشان می‌دهیم. PA دارای اصولی است که مبنای نظریه اعداد طبیعی می‌باشند و اولین بار توسط جوزپه پئانو[۲] و ریچارد ددکیند[۳] به‌طور مستقل و در اواخر قرن نوزدهم ارایه شد. زبان این نظریه $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}} = \{+, \cdot, S, 0, <\}$ می‌باشد که در آن $+$ و $\cdot$ نمادهای تابعی $2-$موضعی به ترتیب، برای جمع و ضرب، S نماد تابعی $1-$موضعی برای عمل تالی، 0 نماد ثابت برای صفر و $<$ یک رابطه ترتیبی $2-$موضعی می‌باشد.

اصول PA عبارتند از:

۱. $\forall x\big(\neg S(x) = 0\big)$

۲. $\forall x \forall y\big(S(x) = S(y) \rightarrow x = y\big)$

۳. $\forall x(x + 0 = x)$

۴. $\forall x \forall y\big(x + S(y) = S(x + y)\big)$

۵. $\forall x(x \cdot 0 = 0)$

۶. $\forall x \forall y\big(x \cdot S(y) = x \cdot y + x\big)$

۷. $\varphi(0) \wedge \forall x\Big(\varphi(x) \rightarrow \varphi\big(S(x)\big)\Big) \rightarrow \forall x \varphi(x)$ (φ یک فرمول دلخواه)

اصل آخر، که صورتی از اصل استقرای ریاضی است، در واقع خود شامل بی‌نهایت اصل است و با جایگذاری هر فرمول دلخواه به جای φ یک اصل به دست می‌آید. یکی از مدل‌های PA که آن را مدل طبیعی یا استاندارد می‌گویند، مجموعه اعداد طبیعی با اعمال جمع، ضرب، تالی و ثابت 0 است [۳].

---

[۲] G. Peano

[۳] R. Dedekind

۳.۱ سازگاری، کمال و درستی

تعریف ۱.۳.۱ (نظریه سازگار). نظریه مرتبه اول Γ سازگار است هرگاه هیچ فرمولی مانند φ موجود نباشد که برای آن هر دو $\Gamma \vdash \varphi$ و $\Gamma \vdash \neg\varphi$ برقرار باشند. در غیر اینصورت Γ را ناسازگار گوییم.

تعریف ۲.۳.۱ (نظریه کامل). نظریه سازگار Γ را کامل گوییم هرگاه به ازای هر فرمول φ داشته باشیم $\Gamma \vdash \varphi$ یا $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

لم ۳.۳.۱. *فرض کنید Γ یک نظریه مرتبه اول باشد در اینصورت داریم:*

۱. *اگر Γ سازگار نباشد آنگاه به ازای هر فرمول φ داریم $\Gamma \vdash \varphi$ (انتفاء مقدم).*

۲. *اگر Γ سازگار باشد و $\Gamma \nvdash \varphi$ آنگاه نظریه $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ نیز سازگار است (توسیع منفی سازگارها).*

۳. *اگر نظریه Γ سازگار باشد، آنگاه مجموعه سازگار و کامل Γ^* موجود است به‌طوری‌که $\Gamma \subset \Gamma^*$ (لم لیندنبائوم[۴]).*

تعریف ۴.۳.۱ (نظریه درست). نظریه Γ را درست گوییم هرگاه فقط جملات درست اثبات شوند، یعنی برای هر فرمول φ اگر $\Gamma \vdash \varphi$ آنگاه $\mathbb{N} \models \varphi$.

۴.۱ سلسله مراتب حسابی

می‌توان مجموعه همه فرمول‌های منطق مرتبه اول را رده‌بندی کرد. توجه داریم که اگر متغیر v_i در فرمول φ ظاهر نشود (آزاد نباشد) آنگاه φ، $\forall v_i\varphi$ و $\exists v_i\varphi$ با هم معادل هستند.

تعریف ۱.۴.۱ (طبقه‌بندی حسابی). ۱. $\Delta_0 = \Sigma_0 = \Pi_0$ را مجموعه همه فرمول‌های کران‌دار تعریف می‌کنیم و یک فرمول مانند φ را Δ_0–فرمول گوییم هرگاه $\varphi \in \Delta_0$.

[۴] Lindenbaum's Lemma

۲. برای هر $n \in \mathbb{N}$، Σ_n را مجموعه فرمول‌های به شکل

$$\exists x_1 \forall x_2 \cdots Q x_n \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n, z)$$

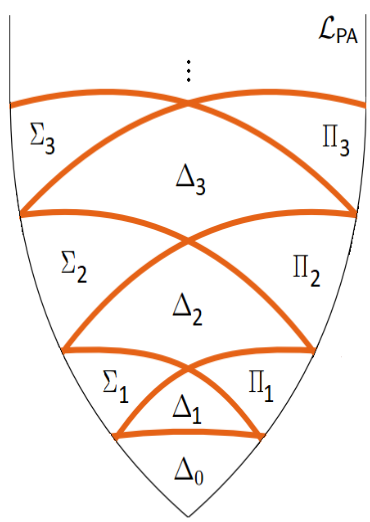
تعریف می‌کنیم که در آن اگر n زوج باشد آنگاه Q سور عمومی و اگر فرد باشد آنگاه سور وجودی است (پس $Q \in \{\forall, \exists\}$) و $\varphi \in \Delta_0$.
فرمولی مانند θ را Σ_n–فرمول گوییم هرگاه فرمولی مانند $\varphi \in \Sigma_n$ موجود باشد به‌طوری‌که داشته باشیم: $\theta \equiv \varphi$.

۳. برای هر $n \in \mathbb{N}$، Π_n را مجموعه فرمول‌های به شکل

$$\forall x_1 \exists x_2 \cdots Q' x_n \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n, z)$$

تعریف می‌کنیم که در آن اگر n زوج باشد آنگاه $Q' = \exists$ و اگر فرد باشد آنگاه $Q' = \forall$ را خواهیم داشت (پس $Q' \in \{\forall, \exists\}$) و $\psi \in \Delta_0$.
فرمولی مانند γ را Π_n–فرمول گوییم هرگاه فرمولی مانند $\psi \in \Pi_n$ موجود باشد به‌طوری‌که داشته باشیم: $\theta \equiv \varphi$.

۴. برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\Delta_n := \Sigma_n \cap \Pi_n$.
شکل زیر نمایی کلی از رده‌بندی حسابی را نشان می‌دهد:



توجه. *واضح است که*

$$\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \cdots$$

$$\Pi_0 \subset \Pi_1 \subset \Pi_2 \subset \cdots$$

$$\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \cdots$$

و هر $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$–فرمول با یک Σ_n–فرمول (به ازای یک n) هم‌ارز منطقی است و داریم:

$$\Sigma_n \cup \Pi_n \subset \Sigma_{n+1} \cap \Pi_{n+1} = \Delta_{n+1} \subset \Sigma_{n+1}, \Pi_{n+1}$$

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنید $n \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. در اینصورت

۱. نظریه S را Σ_n–کامل گوییم هرگاه به ازای هر $\varphi \in \Sigma_n$، اگر $\mathbb{N} \models \varphi$ آنگاه $\mathsf{S} \vdash \varphi$.

۲. نظریه S را Π_n–کامل گوییم هرگاه به ازای هر $\psi \in \Pi_n$، اگر $\mathbb{N} \models \psi$ آنگاه $\mathsf{S} \vdash \psi$.

۳. نظریه S را Σ_n–درست گوییم هرگاه به ازای هر Σ_n–جمله φ که $\mathsf{S} \vdash \varphi$، داشته باشیم: $\mathbb{N} \models \varphi$.

۴. نظریه S را Π_n–درست گوییم هرگاه به ازای هر Π_n–جمله ψ که $\mathsf{S} \vdash \psi$، داشته باشیم: $\mathbb{N} \models \psi$.

لم ۳.۴.۱. *هر نظریه کامل درست، Σ_n–کامل است.*

لم ۴.۴.۱. *اگر نظریه S، Σ_0–کامل باشد آنگاه Σ_1–کامل است.*

برهان. فرض کنید S، Σ_0–کامل باشد و $\psi \in \Sigma_1$ و $\mathbb{N} \models \psi$. باید نشان دهیم $\mathsf{S} \vdash \psi$. چون $\psi \in \Sigma_1$، لذا Σ_0– جمله θ وجود دارد به‌طوری‌که $\psi \equiv \exists w_i \theta(w_i)$. حال چون $\mathbb{N} \models \psi$ لذا $\mathbb{N} \models \exists w_i \theta(w_i)$ و بنابراین $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\theta(n)$ درست است. پس $\mathbb{N} \models \theta(\bar{n})$ و $\theta \in \Sigma_0$. حال چون S، Σ_0–کامل است لذا $\mathsf{S} \vdash \theta(\bar{n})$ و در نتیجه $\mathsf{S} \vdash \exists w_i \theta(w_i)$ و این یعنی $\mathsf{S} \vdash \psi$. □

۵.۱ لم قطری‌سازی و دو پارادوکس

در این بخش T را نظریه‌ای برای حساب اعداد طبیعی در نظر می‌گیریم.
عدد n را در زبان حساب به صورت $\bar{n} = \underbrace{SS\cdots S}_{n\text{-بار}}(0)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۵.۱. تابع $f:\mathbb{N}^k \longrightarrow \mathbb{N}$ را در T نمایش‌پذیر گوییم هرگاه فرمول $\varphi(x_1,\ldots,x_k,y)$ در T موجود باشد به‌طوری که برای هر $(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}^k$ اگر $f(n_1,\ldots,n_k)$ تعریف‌شده باشد آنگاه داشته باشیم:

$$\mathsf{T}\vdash \forall x\big(\varphi(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k},x)\leftrightarrow x=\overline{f(n_1,\ldots,n_k)}\big)$$

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنید $A\subseteq\mathbb{N}^k$. گوییم محمول A در T نمایش‌پذیر است اگر یک فرمول مانند $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ موجود باشد به‌طوری‌که

۱. $(n_1,\ldots,n_k)\in A \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{T}\vdash\varphi(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k})$

۲. $(n_1,\ldots,n_k)\notin A \quad\Longrightarrow\quad \mathsf{T}\vdash\neg\varphi(\overline{n_1},\ldots,\overline{n_k})$

تعریف ۳.۵.۱ (اعداد گودل). گودل برای اثبات قضایای ناتمامیت از روش حسابی‌سازی به صورت زیر استفاده کرد. او برای هر الفبای زبان، عددی نسبت داد و از یک تابع بازگشتی مانند $gn:\mathsf{PA}\longrightarrow\mathbb{N}$ برای کد کردن ترم‌ها، فرمول‌ها و برهان‌ها استفاده کرد. انجام کدگذاری گودل به طرق مختلف امکان‌پذیر است تنها کافی است که تابع تعریف شده بازگشتی باشد؛ آنچه ما در اینجا آورده‌ایم برگرفته از [۳] می‌باشد:

$\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$	$\forall$	$($	0	$)$	S	$\neg$	$<$	$\rightarrow$	$+$	$=$	$\cdot$	x_1	x_i
gn	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$9+2i$

حال اگر $\psi=s_0s_1\cdots s_n$ دنباله‌ای متناهی از نمادها در $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$ باشد آنگاه

$$gn(\psi)=2^{gn(s_0)}\times 3^{gn(s_1)}\times\cdots\times P_n^{gn(s_n)};\qquad (P_n = \text{اُمین عدد اول}-n)$$

و اگر $\theta = \psi_0, \psi_1, \cdots, \psi_m$ دنباله‌ای از عبارت‌ها در $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$ باشد آنگاه

$$gn(\theta) = 2^{gn(\psi_0)} \times 3^{gn(\psi_1)} \times \cdots \times P_m^{gn(\psi_m)}$$

از جمله اگر θ یک برهان باشد. عدد گودل برای عبارت ψ را با $\ulcorner\psi\urcorner$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۵.۱ (برخی از توابع و محمول‌های نمایش‌پذیر). گودل با اثبات قابل نمایش بودن تعداد زیادی تابع و محمول در نهایت نشان داد که توابع و محمول‌های زیر در PA قابل نمایش هستند [۱۰]:

$\mathtt{Prov}(x,y)$: به معنی «x کد یک برهان برای فرمولی با کد y است» می‌باشد.

$\mathtt{diag}(x)$: اگر x کد یک فرمول $\mathtt{A}$ با تنها یک متغیر آزاد y باشد آنگاه $\mathtt{diag}(x)$ کد فرمول $\mathtt{A}[\ulcorner\mathtt{A}\urcorner/y]$ می‌باشد (یعنی کد فرمولی که از جایگزینی متغیر آزاد $\mathtt{A}$ یعنی y با کد خود $\mathtt{A}$ به دست می‌آید).

$\mathtt{Pr}(x)$: «فرمول با کد x در PA قابل اثبات است»، پس

$$\mathtt{Pr}(x) \equiv \exists z\big(\mathtt{Prov}(z,x)\big)$$

قضیه ۵.۵.۱ (لم قطری‌سازی). *برای هر فرمول $\mathtt{B}(y)$ با تنها یک متغیر آزاد y، جمله $\mathtt{D}$ وجود دارد به‌طوری‌که*

$$\mathsf{PA} \vdash \mathtt{D} \leftrightarrow \mathtt{B}(\overline{\ulcorner\mathtt{D}\urcorner})$$

برهان. فرض کنیم $\varphi(x_1,x_2)$ نمایش‌دهنده تابع $\mathtt{diag}(x)$ باشد. پس برای هر $m,n \in \mathbb{N}$، اگر $\mathtt{diag}(n) = m$ آنگاه

$$\mathsf{PA} \vdash \forall y\big(\varphi(\bar{n},y) \leftrightarrow y = \bar{m}\big)$$

حال فرمول $\mathtt{F}(x)$ را برابر $\exists y\big(\varphi(x,y) \wedge \mathtt{B}(y)\big)$ و $\mathtt{D}$ را برابر $\exists y\big(\varphi(\overline{\ulcorner\mathtt{D}\urcorner},y) \wedge \mathtt{B}(y)\big)$ می‌گیریم (یعنی $\mathtt{D} \equiv \mathtt{F}(\ulcorner\mathtt{F}\urcorner)$). $\mathtt{D}$ همان فرمول مورد نظر ما می‌باشد، زیرا

اولا، فرض کنید $\mathtt{B}(\overline{\ulcorner\mathtt{D}\urcorner})$ درست باشد. پس به ازای $y = \overline{\ulcorner\mathtt{D}\urcorner}$، $\mathtt{B}(y)$ درست است. از طرفی $\mathtt{diag}(\overline{\ulcorner\mathtt{F}\urcorner}) = \overline{\ulcorner\mathtt{D}\urcorner}$، پس

$$\mathsf{PA} \vdash \forall\big(\varphi(\overline{\ulcorner\mathtt{F}\urcorner},\overline{\ulcorner\mathtt{D}\urcorner}) \leftrightarrow y = \overline{\ulcorner\mathtt{D}\urcorner}\big)$$

در نتیجه $\varphi(\ulcorner\mathtt{F}\urcorner, \ulcorner\mathtt{D}\urcorner)$ درست است. لذا به ازای $y = \ulcorner\mathtt{D}\urcorner$، $\mathtt{B}(y)$ و $\varphi(\ulcorner\mathtt{F}\urcorner, y)$ درست هستند پس $\exists y\big(\varphi(\ulcorner\mathtt{F}\urcorner, y) \wedge \mathtt{B}(y)\big)$ درست است.

دوما، اگر $\mathtt{D}$ درست باشد آنگاه $\exists y\big(\varphi(\ulcorner\mathtt{F}\urcorner, y) \wedge \mathtt{B}(y)\big)$ درست است، اما چون

$$\mathsf{PA} \vdash \forall\big(\varphi(\ulcorner\mathtt{F}\urcorner, y) \leftrightarrow y = \ulcorner\mathtt{D}\urcorner\big)$$

بنابراین $\varphi(\ulcorner\mathtt{F}\urcorner, y)$ فقط به ازای $y = \ulcorner\mathtt{D}\urcorner$ درست است پس $\exists y\big(\varphi(\ulcorner\mathtt{F}\urcorner, y) \wedge \mathtt{B}(y)\big)$ نیز فقط به ازای $y = \ulcorner\mathtt{D}\urcorner$ درست خواهد بود و این یعنی $\varphi(\ulcorner\mathtt{F}\urcorner, \ulcorner\mathtt{D}\urcorner) \wedge \mathtt{B}(\ulcorner\mathtt{D}\urcorner)$ درست است. بنابراین $\mathtt{B}(\ulcorner\mathtt{D}\urcorner)$ درست است. □

تعریف ۶.۵.۱ (پارادوکس دروغ‌گو). اَمپدکلس، فیلسوف اهل جزیره کرت، زمانی گفته است «همه اهالی کرت دروغ‌گو هستند»، آیا می‌توانیم حرف او را بپذیریم؟ اگر این گزاره را بپذیریم آنگاه باید بپذیریم که خود اَمپدکلس، که یک کرتی است، نیز دروغ‌گو است پس همین حرف او که همه کرتی‌ها دروغ‌گو هستند نیز دروغ است!

مثال فوق نشان می‌دهد که فرض درستی یا نادرستی یک جمله ممکن است نتیجه‌ای در مورد درستی یا نادرستی آن جمله داشته باشد (به این نوع جملات خود ارجاع گوییم). حال اگر جمله‌ای پیدا شود چنان‌چه اگر فرض کنیم که درست است نتیجه شود که نادرست است و اگر فرض کنیم که نادرست است آنگاه نتیجه شود که درست است، با یک پارادوکس تمام عیار روبه‌رو خواهیم بود، به چنین پارادوکس‌هایی پارادوکس دروغ‌گو می‌گوییم.

به عنوان نمونه‌ای دیگر، دو جمله زیر را در نظر بگیرید:

«جمله زیر نادرست است»

«جمله بالا درست است»

اگر فرض کنیم جمله پایین درست است پس جمله بالا درست خواهد بود و در نتیجه جمله پایین نادرست خواهد بود و اگر فرض کنیم جمله پایین نادرست است به شیوه‌ای مشابه به تناقض می‌رسیم.

تعریف ۷.۵.۱ (پارادوکس ریچارد). زبانی را (مثلا فارسی) در نظر بگیرید که بتوان خواص حساب اعداد اصلی را صورت‌بندی و تعریف کرد. فرض کنیم معنای این عبارات را می‌فهمیم:

«یک عدد صحیح، قابل قسمت بر عدد دیگر است»، «یک عدد صحیح حاصل‌ضرب دو عدد دیگر است» و ... . بنابراین می‌توان خاصیت اول بودن را به صورت «بر هیچ عددی جز خود و عدد یک قابل قسمت نباشد» و خاصیت مربع کامل بودن را به شکل «حاصل‌ضرب یک عدد در خود» تعریف کرد. هر یک از این تعاریف تعداد محدودی لغت را در برمی‌گیرد و بنابراین تعداد محدودی از حروف الفبا را دربردارد. این خصوصیت باعث می‌شود که بتوان ترتیب زیر را روی آن‌ها تعریف کرد:

«یک تعریف از تعریف دیگر عقب‌تر است اگر تعداد حروف اولی از تعداد حروف دومی کمتر باشد و اگر دو تعریف تعداد یکسانی از حروف الفبا را شامل شوند ترتیب بر حسب ترتیب الفبایی حروف آن‌ها خواهد بود.»

بر این اساس برای هر تعریف یک عدد صحیح یکتا وجود دارد که متناظر با آن تعریف است و عدد مذکور مکانی را نشان می‌دهد که تعریف آنجا را اِشغال می‌کند. برای مثال تعریفی که کمترین تعداد حروف را در برداشته باشد متناظر با عدد یک خواهد بود. چون هر تعریفی با یک عدد منحصربفرد متناظر شده، لذا ممکن است حالتی پیش آید که یک عدد خصوصیتی را داشته باشد که متناظر با آن، آن را تعریف می‌کند. برای مثال، فرض کنید که عبارت «بر هیچ عددی جز خود و یک قابل قسمت نباشد» با عدد ۱۷ متناظر شده باشد. آشکار است که خود عدد ۱۷ خاصیت مذکور را دارد. از طرف دیگر، فرض کنید عبارت «حاصل‌ضرب یک عدد در خودش باشد» متناظر با عدد ۱۵ باشد، اما می‌بینیم که عدد ۱۵ خاصیت مذکور در تعریف را ندارد. حالتی که در مثال دوم رخ می‌دهد را خاصیت «ریچاردی» گوییم و حالت رخ داده در مثال اول را خاصیت «غیرریچاردی» تعریف می‌کنیم. به‌طور کلی، ریچاردی بودن x را چنین تعریف می‌کنیم:

«x خاصیت ریچاردی را دارد اگر خاصیتی را که به وسیله معرف متناظر با x در مجموعه سریال تعاریف مشخص شده، نداشته باشد.»

حال به حکم جالب پارادوکس ریچارد می‌رسیم. عبارت معرف برای خاصیت ریچاردی بودن یک خاصیت عددی را توصیف می‌کند، بنابراین خود این عبارت به سری تعاریف تعلق دارد. در نتیجه این عبارت با یک عدد یکتا و ثابت متناظر می‌شود. فرض کنید که این عدد

n باشد. آیا n ریچاردی است؟ n ریچاردی است اگروتنهااگر خاصیتی را که به وسیله معرف متناظر با n مشخص شده است را نداشته باشد (یعنی n خاصیت ریچاردی بودن را نداشته باشد). به‌طور خلاصه

«n ریچاردی است اگروتنهااگر n ریچاردی نباشد»

بنابراین حکم «n ریچاردی است» هم درست هست و هم نادرست. پس یک تناقض به‌وجود می‌آید که این تناقض را پارادوکس ریچارد می‌نامیم. این پارادوکس اولین بار توسط ریاضی‌دان فرانسوی ژول ریچارد[۵] در ۱۹۰۵ ارایه شد.

۶.۱ قضایای ناتمامیت گودل

در این بخش باید به این نکته توجه داشت که مفهوم $\omega-$سازگاری در فصل سوم معرفی شده است.

قضیه ۱.۶.۱ (قضیه اول ناتمامیت گودل). *فرض کنید* $\mathtt{T}$ *نظریه‌ای در حساب باشد که قضایای اصلی حساب در آن اثبات شوند. در اینصورت اگر* $\mathtt{T}$ *سازگار باشد آنگاه جمله‌ای مانند* $\mathtt{G}$ *در* $\mathtt{T}$ *وجود خواهد داشت به‌طوری‌که*

۱ . $\mathtt{G}$ در $\mathtt{T}$ *اثبات‌شدنی نیست.*

۲ . *اگر* $\mathtt{T}$ *نظریه‌ای* $\omega-$*سازگار باشد آنگاه* $\neg\mathtt{G}$ *در* $\mathtt{T}$ *اثبات‌شدنی نیست.*

بنابراین اگر $\mathtt{T}$ *نظریه‌ای* $\omega-$*سازگار باشد* $\mathtt{G}$ *جمله‌ای تصمیم‌ناپذیر در* $\mathtt{T}$ *خواهد بود.*

قضیه ۲.۶.۱ (قضیه دوم ناتمامیت گودل). *فرض کنید* $\mathtt{T}$ *نظریه‌ای در حساب باشد که قضایای اصلی حساب در آن اثبات شوند. در اینصورت اگر* $\mathtt{T}$ *سازگار باشد آنگاه گزاره‌ای که بیان‌گر سازگاری* $\mathtt{T}$ *است یک جمله اثبات‌ناپذیر از* $\mathtt{T}$ *خواهد بود. به عبارتی، اگر* $\mathtt{Con_T}$ *بیان‌گر سازگاری* $\mathtt{T}$ *باشد آنگاه* $\mathtt{T} \nvdash \mathtt{Con_T}$.

---

[5] J. Richard

فصل ۲

دیدن درستی جمله گودل

در این فصل کوتاه نگاهی فلسفی و نه‌چندان ریاضی به درستی جمله گودل و تاثیر آن در کل ریاضیات داریم و بیشتر به بررسی نظرات راجر پنرُز[۱] [۹] ریاضی‌دان انگلیسی توسط گئورگ بولوس[۲] [۲] اختصاص داده شده است.

[۱] R. Penrose

[۲] G. Boolos

همان‌طور که گفته شد گودل نشان داد که برای هر نظریه صوری «به اندازه کافی قوی» S، یک جمله G در زبان S معادل در S با S–اثبات‌ناپذیری خودش وجود دارد که در S اثبات نمی‌شود، به شرطی که S سازگار باشد. (در موارد عادی، G در S معادل با جمله بیان کننده سازگاری S است.) بنابراین اگر S فقط جملات درست را اثبات کند و در نتیجه سازگار باشد آنگاه G در S اثبات‌پذیر نیست.

راجِر پِنرُز [۹] ادعا می‌کند که اگرچه G در S اثبات‌ناپذیر است، اما همواره می‌توان دید که مطابق استدلال زیر G درست است: اگر G در S اثبات‌پذیر باشد، آنگاه G نادرست است، ولی این غیرممکن است (از صفحات ۸–۱۰۷ مقاله پنرز: سیستم صوری ما **نباید** به حدی نامناسب ساخته شده باشد که عملا به جملات نادرست اجازه اثبات شدن بدهد.) بنابراین G اثبات‌ناپذیر بوده و در نتیجه درست است.

نظریه‌های صوری جالب توجه خاصی وجود دارند که مجموعه جملات اثبات‌پذیر آن‌ها شامل هیچ کذبی نیست؛ برای مثال می‌توان حساب پئانو PA را در نظر گرفت. در حقیقت، جمله گودل PA، که PA–اثبات‌ناپذیری خودش را بیان می‌کند، درست و در PA اثبات‌ناپذیر است.

تصدیق جمله گودل PA، که در آن تنها یک بخش (گرچه نابدیهی) از ریاضیات حقیقی را می‌توان بیان و اثبات کرد، تصدیقی بر این نیست که می‌توانیم درستی جملات گودل را برای نظریه‌های قدرتمند بسیاری مانند نظریه مجموعه ZF مشاهده کنیم، گرچه تقریبا کل ریاضیات در ZF قابل نمایش است. حال می‌خواهیم دلایل خود را مبنی بر این که هیچ حس «مشاهده‌ای» برای دیدن سازگاری ZF وجود ندارد، ارایه دهیم. بنابراین نمی‌توانیم درستی جمله گودل را برای ZF ببینیم، برای آنکه این جمله معادل با سازگاری ZF است (در نظریه‌ای خیلی ضعیف‌تر از ZF).

یک داستان واقعی: روزی روزگاری، J یک متخصص نظریه مجموعه‌ها به نظریه مجموعه‌دان هم‌رده‌اش M پیامی فرستاد که در آن اظهار داشت که ثابت کرده است که نظریه ZFM (وجود یک کاردینال اندازه‌پذیر+ ZF) که توسط M و بسیاری دیگر یافت شده بود، ناسازگار است. M شروع به کار کرد و خطا را در نوشته J پیدا کرد. آنگاه که بررسی اثبات J را آغاز

نمود، M یک اطمینان خاطر داشت که اشتباه را پیدا خواهد کرد، اما به هیچ وجه غلط بودن اثبات J یا سازگاری ZFM را نمی‌توانست بداند. آیا می‌دانیم که برخی از متخصصین آینده آنچه را که M می‌ترسید J در ZFM انجام داده باشد را در ZF انجام نخواهند داد؟

بولوس [۲] معتقد است که ما نمی‌توانستیم بدانیم که آیا در همان وضعیت برای نظریه ZF هستیم که فرگه[۳] نسبت به نظریه مجموعه‌های طبیعی (یا به‌طور دقیق‌تر در سیستم قوانین اصلی حساب او) در آن قرار داشت قبل از دریافت نامه مشهور راسل در ژوئن ۱۹۰۲، که در آن اثبات‌پذیری پارادوکس راسل را در سیستم فرگه نشان می‌داد. از نظر بولوس اینکه ما فکر کنیم که می‌توانیم به‌طور کامل سازگار بودن ریاضیات را ببینیم یک اشتباه است، اشتباهی که به خاطر توانایی ما در دیدن سازگاری بخش‌های خاص آن پرورش یافته است.

کلمه «**نباید**» نقل شده در جمله پنرز باید ما را متوقف کند. البته دستگاه صوری ما نباید طوری ساخته شده باشد که شامل قضایای غلط باشد. آنچه که در این مورد احتمالاً به آن باور یا امید داریم، که البته نمیتوان «دید» چنین باشد، این است که کل ریاضیات به این شکل بد ساخته نشده است. آیا واقعا آنقدر مطمئن هستیم که میلیون‌ها صفحه اثبات جمله «$0 = 1$» وجود ندارد که از الان تا دویست سال آینده کشف خواهد شد؟ آیا می‌دانیم که واقعا در وضعیت بهتری نسبت به فرگه در ماه می ۱۹۰۲ هستیم؟

پنرز [۹] چیزی مبنی بر اینکه نشان دهد ما می‌توانیم درستی جمله گودل برای ZF، یا برای هر تقریب معقول دیگر از کل ریاضیات، که خودمان استفاده می‌کنیم را تشخیص دهیم، نگفته است. آنچه در مورد درستی می‌توانیم ببینیم این گزاره شرطی است: جمله گودل برای ZF، ZF–اثبات‌ناپذیر (و بنابراین درست) است اگر ZF سازگار باشد. ما نمی‌توانیم ببینیم که جمله گودل دقیقا درست است، زیرا نمی‌توانیم سازگاری ZF را ببینیم. ممکن است ما امید یا باور داشته باشیم که چنین باشد، اما آن را نمی‌دانیم و بنابراین نمی‌توانیم آن را مشاهده کنیم.

پنرز [۹] یک نوع نظر نه چندان پیشرفته در بحثی از قضیه گودل ارایه داده است. او بیان می‌کند زمانی که یک ریاضی‌دان اثباتی برای برخی قضایا کشف می‌کند، ریاضی‌دانان

[۳] G. Frege

دیگر به راحتی و سریعا هم‌دیگر را در مورد درستی آن متقاعد می‌کنند.

بولوس [۲] می‌گوید: من فکر نمی‌کنم که پنرز استدلالی مبنی بر آنکه مقبولیت یک گزاره اخیرا اثبات شده نشان می‌دهد که ریاضی‌دانان درستی آن را فورا می‌بینند بی آنکه بدانند از بقیه ریاضیات نتیجه می‌شود ارایه داده باشد، یعنی، یک گزاره درست است اگر از بقیه ریاضیات قابل قبول استنتاج شده باشد. پنرز [۹] به درستی تایید می‌کند که ما این را که هر گام در یک استدلال می‌تواند به چیزهای ساده و واضح تقلیل یابد را باید مشاهده کنیم. اما احتمال دارد چنین تقلیلی ممکن نباشد: بسیاری اصل تصریح مجموعه‌ها در آنالیز ریاضی را نه ساده و نه بدیهی می‌پندارند؛ و هیچ‌کدام از اصول نظریه مجموعه‌ها خودش را مانند «$x + 0 = x$» به ما تحمیل نمی‌کند.

وقتی ما خودمان را در مورد درستی قضیه گودل قانع می‌کنیم نه‌تنها آن را «مشاهده» می‌کنیم بلکه با انجام این کار ماهیت بسیار غیرالگوریتمی بودن فرآیند «دیدن» را درمی‌یابیم. از آنجایی‌که یکی از فرض های قضیه گودل، سازگاری نظریه‌های مورد ملاحظه شده می‌باشد، هدف پنرز در اینجا دیدن درستی جمله گودل می‌باشد؛ اما بولوس [۲] استدلال می‌کند که اگر آن نظریه یک تقریب معقول برای کل ریاضیات باشد، ما نمی‌توانیم این کار را انجام دهیم (یعنی سازگاری آن را فورا ببینیم).

مجموعه مندلبورت[۴] پیچیده‌ترین شی در کل ریاضیات شناخته شده است، اما خود ریاضیات البته در پیچیدگی از مجموعه مندلبورت پیشی گرفته است. آیا ما واقعا می‌توانیم «مشاهده» کنیم که «$0 = 1$» دارای اثباتی طولانی، پیچیده و ابتکاری که شاید شامل مفاهیم و استدلال‌هایی از نوعی که امروزه ما از پیچیدگی آن‌ها بی‌اطلاع هستیم، نباشد؟

[۴] Mandelbrot set

فصل ۳

شرایط لازم و کافی برای تصمیم‌ناپذیری جمله گودل و درستی آن

در این فصل، پس از معرفی جمله گودل برای دستگاه صوری S، درستی و تصمیم‌ناپذیری آن برای دستگاه درست S بررسی شده و به رابطه بین درستی، سازگاری و تمامیت دستگاه S پرداخته شده است. همچنین مفهوم $\omega-$ سازگاری گودل معرفی شده و رابطه آن با سازگاری و درستی مورد مطالعه قرار گرفته است.

۱.۳ درستی و سازگاری

چهار ویژگی کلیدی برای اثبات قضیه ناتمامیت گودل برای یک سیستم S در زبان $\mathcal{L}$ی که برای هر عدد طبیعی n یک ترم $\bar{n}$ در آن متناظر می‌شود، وقتی که متغیرهای $\mathcal{L}$ روی اعداد طبیعی تغییر کند، عبارتند از:

- ویژگی نخست تناظر اعداد به نمادهای $\mathcal{L}$ می‌باشد که به عبارت‌های (یعنی دنباله‌های متناهی از نمادهای) زبان $\mathcal{L}$ در S، که ما آن را با $\ulcorner \mathtt{E} \urcorner$ برای نشان دادن عدد متناظر شده به عبارت E نمایش دادیم. این تناظر توسط تابع $x*y=z$ انجام می‌شود که زوج مرتب اعداد طبیعی را به اعداد طبیعی می‌برد و در $\mathcal{L}$ قابل نمایش است به‌طوری‌که $\frown$ عملگر الحاق دو عبارت است: برای هر دو عبارت X و Y در $\mathcal{L}$ داریم $\ulcorner \mathtt{X}\frown\mathtt{Y} \urcorner = \ulcorner \mathtt{X} \urcorner * \ulcorner \mathtt{Y} \urcorner$. برای هر عدد طبیعی n ما لازم داریم که $\ulcorner \bar{n} \urcorner$ در زبان $\mathcal{L}$ قابل نمایش باشد.
- ویژگی دوم نشان دادن این است که برای هر فرمول $\mathtt{F}(v_1)$ با یک متغیر آزاد در زبان $\mathcal{L}$، جمله‌ای مانند D وجود داردبه‌طوری‌که رابطه $(\mathtt{D} \equiv \mathtt{F}(\overline{\ulcorner \mathtt{D} \urcorner}))$ درست است (لم قطری).
- ویژگی سوم ساختن فرمولی مانند $\mathtt{Pr}(v_1)$ با یک متغیر آزاد در $\mathcal{L}$ است به‌طوری‌که $\mathtt{S} \vdash X$ اگروتنهااگر $\mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{X} \urcorner)$ درست باشد.
- جمله گودل می‌تواند با به کارگیری لم قطری برای فرمول یک متغیره $\neg\mathtt{Pr}(v_1)$ به دست آید، یعنی، جمله گودل جمله‌ای مانند G است به‌طوری‌که $\mathtt{G} \equiv \neg\mathtt{Pr}(\overline{\ulcorner \mathtt{G} \urcorner})$ درست است.

قضیه ۱.۱.۳. *اگر هر قضیه* S *درست باشد (در مجموعه اعداد طبیعی) آنگاه* $\mathtt{S} \nvdash \mathtt{G}$، *جمله* G *درست است و* $\mathtt{S} \nvdash \neg\mathtt{G}$.

برهان. فرض کنید $\mathtt{S} \vdash \mathtt{G}$. آنگاه طبق ویژگی سوم، $\mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{G} \urcorner)$ درست است، بنابراین $\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{G} \urcorner)$ نادرست است، از طرفی طبق هم‌ارزی قطری داریم $\mathtt{G} \equiv \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{G} \urcorner)$ و لذا G نادرست است. اما طبق فرض S نظریه‌ای درست است (فقط جملات درست اثبات می‌شوند)، پس $\mathtt{S} \nvdash \mathtt{G}$، که این با فرض $\mathtt{S} \vdash \mathtt{G}$ در تناقض است. بنابراین طبق منطق گزاره‌ها $\mathtt{S} \nvdash \mathtt{G}$. به‌نابر

ویژگی سوم $\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{G} \urcorner)$ درست است و طبق هم‌ارزی قطری، $\mathtt{G}$ درست است پس $\neg\mathtt{G}$ نادرست است. حال از درستی $\mathtt{S}$ نتیجه می‌گیریم که $\mathtt{S} \nvdash \neg\mathtt{G}$. □

تذکر ۲.۱.۳. با فرض بسیار قوی درست بودن هر قضیه دستگاه، و با وجود شباهت صوری (قطری خودارجاعی) اثبات قضیه اول ناتمامیت با پارادوکس‌هایی مانند پارادوکس ریچارد و پارادوکس دروغگو (همچنان که توسط گودل در قسمت مقدمه [۵] اشاره شده است)، هیچ خطری از پارادوکس وجود ندارد. قطری‌سازی اثبات‌پذیری در محتوای اثبات‌پذیری درست، جمله‌ای را ارایه می‌دهد که نه اثبات‌پذیر است و نه ردپذیر؛ که در آن هنگام یک شگفتی بود ولی پارادوکس (متناقض) نیست. قطری‌سازی بر روی درستی به جمله‌ای منجر می‌شود که هم درست است و هم نادرست است، یک پارادوکس، یا به زبان نحو حسابی شده به نتیجه‌ای تظریف‌شده‌تر منجر می‌شود مبنی بر اینکه درستی زبان حساب در زبان حساب تعریف‌پذیر نیست (قضیه تارسکی[۱]).

درستی، سازگاری را نتیجه می‌دهد چون هیچ جمله‌ای همراه با نقیض آن نمی‌تواند درست باشد. ولی سازگاری، درستی را نتیجه نمی‌دهد یعنی سازگاری شرطی خیلی ضعیف‌تر از درستی است که این نتیجه‌ای از قضیه ۱.۱.۳ هست:

نتیجه ۳.۱.۳. *اگر نظریه* $\mathtt{S}$ *درست باشد آنگاه* $\mathtt{S} \cup \{\neg\mathtt{G}\}$ *سازگار است ولی درست نیست.*

برهان. چون $\mathtt{S}$ درست است، لذا طبق قضیه ۱.۱.۳، $\mathtt{S} \nvdash \mathtt{G}$. بنابراین طبق منطق گزاره‌ها $\mathtt{S} \cup \{\neg\mathtt{G}\}$ سازگار است و چون $\mathtt{S} \nvdash \mathtt{G}$، لذا طبق ویژگی سوم، $\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner \mathtt{G} \urcorner)$ درست بوده و از هم‌ارزی قطری نتیجه می‌شود که $\mathtt{G}$ درست است و لذا $\neg\mathtt{G}$ نادرست می‌باشد. □

اینکه سازگاری اکیدا ضعیف‌تر از درستی است می‌تواند بدون نگارش نحوی مورد نظر برای سیستم حساب در برهان نتیجه ۳.۱.۳ اثبات شود. برای مثال مطابق زیر داریم:

قضیه ۴.۱.۳. *فرض کنید* $\mathsf{Q}^* =_{\mathrm{df}} \mathsf{Q} \cup \{\exists v_1(1+v_1=v_1)\}$ *که در آن* Q *عبارت است از اصول* PA *منهای اصل استقرا.* Q^* *سازگار است و یک جمله غلط در ساختار اعداد طبیعی را اثبات می‌کند.*

[۱] Tarski's undefinability theorem

برهان. Q^* سازگار است، زیرا با اوردینال‌های کمتر از ω^ω قابل تعبیر است به‌طوری‌که صفر با اوردینال 0 و تالی، جمع و ضرب مانند اوردینال‌ها قابل بیان هستند، همچنین جمله $\exists v_1(1+v_1=v_1)$ در ساختار اعداد طبیعی نادرست است و $\mathsf{Q}^* \vdash \exists v_1(1+v_1=v_1)$. بنابراین Q^* نظریه‌ای سازگار است که درستی را نتیجه نمی‌دهد. □

سازگاری یک سیستم Σ_0–کامل، یک درجه مشروط از درستی در ساختار اعداد طبیعی را نتیجه می‌دهد، چنان‌که داریم:

قضیه ۵.۱.۳. *اگر سیستم S سازگار و Σ_0–کامل باشد آنگاه Σ_0–درست است، یعنی اگر جمله X، یک جمله Σ_0 باشد و $\mathsf{S} \vdash \mathsf{X}$، آنگاه X درست است.*

برهان. فرض کنید S یک دستگاه Σ_0–کامل و سازگار باشد که Σ_0–درست نیست. پس Σ_0–جمله X وجود دارد که $\mathsf{S} \vdash \mathsf{X}$ و X نادرست است. بنابراین $\neg\mathsf{X}$ یک جمله درست و Σ_0 هست. حال چون S، Σ_0–کامل هست، بنابراین $\mathsf{S} \vdash \neg\mathsf{X}$. اما S سازگار است و لذا نتیجه می‌گیریم که $\mathsf{S} \nvdash \mathsf{X}$ و این یک تناقض هست. پس فرض خلف باطل بوده و S، Σ_0–درست می‌باشد. □

طبق قضیه ۴.۱.۳، این بهترین نتیجه ممکن می‌باشد. عکس قضیه ۵.۱.۳ همواره برقرار است، بنابراین داریم:

قضیه ۶.۱.۳. *برای هر سیستم Σ_0–کامل، سازگاری معادل با Σ_0–درستی است.*

برهان. فرض کنید S دستگاهی Σ_0–کامل باشد. نشان می‌دهیم معادله زیر برقرار است:

«S سازگار است اگروتنهااگر Σ_0–درست باشد»

$\Leftarrow$: فرض کنید S سازگار باشد در اینصورت طبق قضیه۵.۱.۳، Σ_0–درست نیز می‌باشد.
$\Rightarrow$: اگر S، Σ_0–درست باشد در اینصورت به ازای هر Σ_0–جمله نادرست مانند X، $\mathsf{S} \nvdash \mathsf{X}$. بنابراین S سازگار است، زیرا در غیر اینصورت به ازای هر فرمول φ، $\mathsf{S} \vdash \varphi$، و به‌خصوص، $\mathsf{S} \vdash \mathsf{X}$ که یک تناقض است. □

تذکر ۷.۱.۳. سازگاری شرط لازم برای ناتمامیت است، زیرا اگر $\mathtt{S}$ ناسازگار باشد آنگاه طبق منطق گزاره‌ها، برای هر $\mathtt{F}$، $\mathtt{S}\vdash\mathtt{F}$ و $\mathtt{S}\vdash\neg\mathtt{F}$، بنابراین به‌طور قوی‌تر $\mathtt{S}\vdash\mathtt{F}$ یا $\mathtt{S}\vdash\neg\mathtt{F}$ و این یعنی $\mathtt{S}$ کامل است.

سازگاری $\mathtt{S}$ نه تنها شرط لازم بلکه شرط کافی برای $\mathtt{S}\nvdash\mathtt{G}$ است. این نیمه نخست قضیه اول ناتمامیت گودل می‌باشد که به شرح زیر است.

اثبات به دو نتیجه نحو حسابی شده از $\mathtt{S}$ بستگی دارد.

حقیقت ۸.۱.۳. یک Σ_0 – فرمول $\mathtt{Prov}(v_1,v_2)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\exists v_2\mathtt{Prov}(v_1,v_2)$ مجموعه $\{n\ :\ \mathtt{S}\vdash\mathtt{E}_n\}$ را نمایش می‌دهد که در آن $\mathtt{E}_n$ عبارتی در زبان $\mathtt{S}$ با عدد گودل n است، یعنی، $\mathtt{S}\vdash\mathtt{E}_n$ اگروتنهااگر $\exists v_2\mathtt{Prov}(\bar{n},v_2)$ درست باشد.

لم ۹.۱.۳. *یک Σ_0 – فرمول $\mathtt{A}(v_1,v_2)$ وجود دارد به‌طوری‌که فرمول $\exists v_2\mathtt{A}(v_1,v_2)$ مجموعه $\{n\ :\ \mathtt{S}\vdash\mathtt{E}_n(n)\}$ را نمایش می‌دهد به‌طوری‌که اگر $\mathtt{E}_n$ یک فرمول با یک متغیر آزاد در زبان $\mathtt{S}$ باشد آنگاه $\mathtt{E}_n(n)$ فرمولی است که از جایگذاری n به جای v_1 در $\mathtt{E}_n$ نتیجه می‌شود، یعنی، $a\in\{n:\ \mathtt{S}\vdash\mathtt{E}_n(n)\}$ اگروتنهااگر $\exists v_2\mathtt{A}(\bar{a},v_2)$ درست باشد.*

برهان. از حقیقت ۸.۱.۳ با جای‌گذاری در $\exists v_2\mathtt{Prov}(v_1,v_2)$ نتیجه می‌شود. □

قضیه ۱۰.۱.۳. *فرض کنید $a=_{\mathrm{df}}\ulcorner\forall v_2\neg\mathtt{A}(v_1,v_2)\urcorner$ و $\mathtt{G}=_{\mathrm{df}}\forall v_2\neg\mathtt{A}(\bar{a},v_2)$. در اینصورت اگر $\mathtt{S}$ سازگار و Σ_0–کامل باشد آنگاه $\mathtt{S}\nvdash\mathtt{G}$.*

برهان. فرض کنید $\mathtt{S}\vdash\mathtt{G}$، یعنی، $\mathtt{S}\vdash\forall v_2\neg\mathtt{A}(\bar{a},v_2)$. آنگاه طبق تعریف a و $\mathtt{G}$ نتیجه می‌شود که $a\in\{n\ :\ \mathtt{S}\vdash\mathtt{E}_n(n)\}$. طبق لم ۹.۱.۳، $\exists v_2\mathtt{A}(\bar{a},v_2)$ درست است. از اینکه $\mathtt{S}$، Σ_0–کامل و در نتیجه Σ_1 – کامل است لذا $\mathtt{S}\vdash\exists v_2\mathtt{A}(\bar{a},v_2)$ یعنی $\mathtt{S}\vdash\neg\mathtt{G}$ که این با سازگاری $\mathtt{S}$ در تناقض است. بنابراین $\mathtt{S}\nvdash\mathtt{G}$. □

۲.۳ درستی جمله گودل

قضیه ۱.۲.۳. *برای هر Π_1–جمله $\mathtt{X}$ در زبان نظریه Σ_0–کامل $\mathtt{S}$، اگر $\mathtt{S} \nvdash \neg\mathtt{X}$، آنگاه $\mathtt{X}$ درست است.*

برهان. چون $\mathtt{X}$، Π_1 است لذا $\mathtt{X}$ به فرم $\forall v_i \mathtt{F}(v_i)$ می‌باشد که $\mathtt{F}(v_i)$ یک Σ_0–فرمول است. اگر $\mathtt{X}$ نادرست باشد آنگاه $\exists v_i \neg\mathtt{F}(v_i)$ درست است، بنابراین عدد طبیعی k وجود دارد به‌طوری‌که $\neg\mathtt{F}(k)$ درست است. لذا با توجه به Σ_0–کامل بودن $\mathtt{S}$، $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{F}(\bar{k})$. پس $\mathtt{S} \vdash \exists v_i \neg\mathtt{F}(v_i)$ و در نتیجه $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{X}$ و این با فرض $\mathtt{S} \nvdash \neg\mathtt{X}$ در تناقض است، بنابراین $\mathtt{X}$ درست است. □

چون جمله گودل $\mathtt{G}$ برای هر سیستم $\mathtt{S}$، Π_1 است پس طبق قضیه ۱.۲.۳، اگر $\mathtt{S} \nvdash \neg\mathtt{G}$، آنگاه $\mathtt{G}$ درست است. در ادامه خواهیم دید که $\mathtt{S} \nvdash \neg\mathtt{G}$ فقط با یک شرط قوی‌تر از سازگاری $\mathtt{S}$ برقرار می‌شود، اما حالا از اثبات قضیه ۱۰.۱.۳، می‌بینیم که اگر $\mathtt{S}$ سازگار باشد آنگاه $\mathtt{S} \nvdash \mathtt{G}$ و مطابق آن نتیجه قوی زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۲.۲.۳. *اگر $\mathtt{S}$ سازگار باشد آنگاه جمله گودل برای $\mathtt{S}$ درست است.*

برهان. طبق قضیه ۱۰.۱.۳، چون $\mathtt{S}$ سازگار است، لذا $\mathtt{S} \nvdash \mathtt{G}$، که در اینصورت خواهیم داشت: $a \notin \{n \ : \ \mathtt{S} \vdash \mathtt{E}_n(n)\}$. حال طبق لم ۹.۱.۳، $\exists v_2 \mathtt{A}(\bar{a}, v_2)$ نادرست است، بنابراین $\forall v_2 \neg\mathtt{A}(\bar{a}, v_2)$ درست است و این یعنی $\mathtt{G}$ درست است. □

قضیه ۳.۲.۳. *اگر جمله گودل برای سیستم $\mathtt{S}$ درست باشد آنگاه $\mathtt{S}$ سازگار است.*

برهان. اگر $\mathtt{G}$، یعنی $\forall v_2 \neg\mathtt{A}(\bar{a}, v_2)$ درست باشد آنگاه $\exists v_2 \mathtt{A}(\bar{a}, v_2)$ نادرست است، که در این صورت طبق لم ۹.۱.۳، $\mathtt{S} \nvdash \mathtt{G}$. اما یک سیستم سازگار هست هرگاه جمله‌ای موجود باشد که نتواند آن را اثبات کند، بنابراین $\mathtt{S}$ سازگار است. □

تذکر ۴.۲.۳. سوال «چگونه می‌توانیم بدانیم که جمله گودل یک نظریه $\mathtt{S}$ درست است؟» توسط قضایای ۲.۲.۳ و ۳.۲.۳ به سوال «چگونه سازگاری $\mathtt{S}$ را می‌دانیم؟» تحویل می‌شود. تقریبا هر کسی که درباره (برای مثال) حساب پئانو اطلاع دارد باور دارد که آن سازگار هست.

همین‌طور دلیلی که با بیشترین احتمال یک شخص می‌تواند برای اطمینان از سازگاری PA ارایه دهد این خواهد بود که این نظریه در مجموعه اعداد صحیح درست است ولی این یک شرط قوی‌تری از سازگاری است و سازگاری همان چیزی است که برای درستی جمله گودل بدان نیاز داریم. هیلبرت در مورد برهان‌های سازگاری کاملاً متناهی بحث کرد که قضیه دوم ناتمامیت گودل نشان داد که این امر امکان‌پذیر نیست.

۳.۳ تعریف گودل برای ω–سازگاری

ملاحظه کردیم که سازگاری $\mathtt{S}$ شرط کافی برای برقراری $\mathtt{S} \nvdash \mathtt{G}$ است که در آن $\mathtt{G}$ جمله گودل $\mathtt{S}$ است. سازگاری $\mathtt{S}$ برای نشان دادن $\mathtt{S} \nvdash \neg\mathtt{G}$ کافی نیست، زیرا سیستم‌های سازگاری موجود هستند که نقیض جمله گودل خود را اثبات می‌کنند. به‌طور مثال داریم:

قضیه ۱.۳.۳ (نظریه‌ای سازگار که جمله گودل خود را رد می‌کند). *فرض کنید $\mathtt{S}$ یک دستگاه سازگار باشد. برای محمول اثبات‌پذیری $\mathtt{P}(v_1)$ برای $\mathtt{S}$ و برای یک جمله $\mathtt{G}$ در زبان $\mathtt{S}$ که $\mathtt{S} \vdash (\mathtt{G} \equiv \neg\mathtt{P}(\ulcorner\mathtt{G}\urcorner))$، فرض کنید $\mathtt{S}^*$ دستگاه $\mathtt{S} \cup \{\neg\mathtt{G}\}$ باشد. فرض کنید $\mathtt{P}^*(v_1)$ یک محمول اثبات‌پذیری برای $\mathtt{S}^*$ باشد و $\mathtt{G}^*$ جمله‌ای باشد که $\mathtt{S}^* \vdash (\mathtt{G}^* \equiv \neg\mathtt{P}^*(\ulcorner\mathtt{G}^*\urcorner))$، آنگاه $\mathtt{S}^* \vdash \neg\mathtt{G}^*$.*

برهان. $\mathtt{S}^* = \mathtt{S} \cup \{\neg\mathtt{G}\}$ سازگار است، زیرا $\mathtt{S}$ سازگار است و از طرفی $\mathtt{S} \vdash \mathtt{G} \equiv \neg\mathtt{P}(\ulcorner\mathtt{G}\urcorner)$ و لذا چون $\neg\mathtt{P}(\ulcorner\mathtt{G}\urcorner)$ درست است در نتیجه $\mathtt{G}$ درست است، پس $\mathtt{S} \nvdash \mathtt{G}$ و این طبق توسیع منفی سازگارها، نتیجه می‌دهدکه $\mathtt{S} \cup \{\neg\mathtt{G}\}$ سازگار است. حال نشان می‌دهیم که $\mathtt{S}^*$ جمله گودل خود را رد می‌کند:
طبق منطق گزاره‌ای برای هر جمله $\mathtt{X}$،

$$\mathtt{S} \vdash (\mathtt{X} \to (\neg\mathtt{G} \to \mathtt{X})) \qquad (۱.۳)$$

و طبق این ویژگی که $\mathtt{P}(v_1)$ محمول اثبات‌پذیری برای $\mathtt{S}$ است داریم [۸]:

$$\mathtt{S} \vdash \mathtt{P}\Big((\overline{\ulcorner \mathtt{X} \urcorner}) \rightarrow (\overline{\ulcorner (\neg \mathtt{G} \rightarrow \mathtt{X}) \urcorner})\Big)$$
$$\mathtt{S} \vdash \mathtt{P}\Big((\overline{\ulcorner \mathtt{X} \urcorner}) \rightarrow (\overline{\ulcorner (\neg \mathtt{G} \rightarrow \mathtt{X}) \urcorner})\Big) \rightarrow \Big(\mathtt{P}(\overline{\ulcorner \mathtt{X} \urcorner}) \rightarrow \mathtt{P}(\overline{\ulcorner (\neg \mathtt{G} \rightarrow \mathtt{X}) \urcorner})\Big)$$
$$\mathtt{S} \vdash \Big(\mathtt{P}(\overline{\ulcorner \mathtt{X} \urcorner}) \rightarrow \mathtt{P}(\overline{\ulcorner (\neg \mathtt{G} \rightarrow \mathtt{X}) \urcorner})\Big) \tag{۲.۳}$$

حال چون $\mathtt{S} \subset \mathtt{S}^*$ داریم:

$$\mathtt{S}^* \vdash \Big(\mathtt{P}(\overline{\ulcorner \mathtt{X} \urcorner}) \rightarrow \mathtt{P}(\overline{\ulcorner (\neg \mathtt{G} \rightarrow \mathtt{X}) \urcorner})\Big) \tag{۳.۳}$$

بنابراین

$$\mathtt{S}^* \vdash \big(\mathtt{P}(\overline{\ulcorner \mathtt{X} \urcorner}) \rightarrow \mathtt{P}^*(\ulcorner \mathtt{X} \urcorner)\big) \tag{۴.۳}$$

طبق برهان قضیه دوم ناتمامیت برای Xی که $\mathtt{S} \vdash \neg \mathtt{X}$، رابطه

$$\mathtt{S} \vdash \big(\neg \mathtt{G} \equiv \mathtt{P}(\overline{\ulcorner \mathtt{X} \urcorner})\big)$$

برقرار است و لذا

$$\mathtt{S}^* \vdash \big(\neg \mathtt{G} \equiv \mathtt{P}(\overline{\ulcorner \mathtt{X} \urcorner})\big) \tag{۵.۳}$$

از اینکه $\mathtt{S} \vdash \neg \mathtt{X}$ داریم $\mathtt{S}^* \vdash \neg \mathtt{X}$ و طبق قضیه دوم ناتمامیت برای $\mathtt{S}^*$ داریم:

$$\mathtt{S}^* \vdash \big(\neg \mathtt{G}^* \equiv \mathtt{P}^*(\overline{\ulcorner \mathtt{X} \urcorner})\big) \tag{۶.۳}$$

حال طبق (۴.۳)، (۵.۳) و (۶.۳) داریم $\mathtt{S}^* \vdash (\neg \mathtt{G} \rightarrow \neg \mathtt{G}^*)$. آنگاه از اینکه $\mathtt{S}^* \vdash \neg \mathtt{G}$ داریم $\mathtt{S}^* \vdash \neg \mathtt{G}^*$. □

قضیه فوق نشان می‌دهد که برای اثبات نیمه دوم قضیه اول ناتمامیت، یعنی برای برقراری $\mathtt{S} \nvdash \neg \mathtt{G}$، فرضی قوی‌تر از سازگاری $\mathtt{S}$ را لازم داریم. گودل به فرضی که آن را $\omega-$سازگاری نامید استناد کرد.

تعریف ۲.۳.۳ (ω–سازگاری). سیستم S در یک زبان را که برای هر عدد طبیعی n شامل ترم بسته $\bar{n}$ نمایان‌گر عدد n می‌باشد را ω–سازگار گوییم اگروتنهااگر فرمول $\mathtt{F}(v_i)$ با یک متغیر آزاد در زبان $\mathcal{L}$ موجود نباشد به‌طوری‌که $\mathtt{S} \vdash \exists v_i \mathtt{F}(v_i)$ و برای هر عدد طبیعی n، $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{F}(\bar{n})$.

قضیه ۳.۳.۳. *اگر سیستمی ω–سازگار باشد، آنگاه سازگار است.*

برهان. اگر S یک سیستم ناسازگار باشد آنگاه S هر فرمول در زبان S را اثبات می‌کند؛ به خصوص برای هر فرمول $\mathtt{F}(w)$ با یک متغیر آزاد. بنابراین $\mathtt{S} \vdash \exists w \mathtt{F}(w)$ و برای هر n، $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{F}(\bar{n})$؛ و این یعنی S، ω–ناسازگار است. □

عکس قضیه ۳.۳.۳ برقرار نیست، یعنی، سازگاری اکیدا ضعیف‌تر از ω–سازگاری است.

قضیه ۴.۳.۳. *سیستم‌های سازگاری وجود دارند که ω–ناسازگار هستند.*

برهان. سیستم $\mathtt{Q}^*$ در قضیه ۴.۱.۳ را در نظر بگیرید. در اثبات قضیه نشان دادیم که $\mathtt{Q}^*$ سازگار است. اما $\mathtt{Q}^*$ مطابق زیر ω–ناسازگار است: با استقرا نشان می‌دهیم که برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\mathtt{Q}^* \vdash \neg 1 + \bar{n} = \bar{n}$$

برای شروع استقرا داریم:

$$\mathtt{Q}^* \vdash 1 + 0 = 1$$

بنابراین

$$\mathtt{Q}^* \vdash \neg 1 + 0 = 0$$

حال فرض کنید (فرض استقرا) حکم برای n برقرار باشد، می‌دانیم [۳]:

$$\mathtt{Q}^* \vdash (\neg 1 + \bar{n} = \bar{n} \to \neg(1 + \bar{n})' = \bar{n}')$$

بنابراین چون طبق فرض استقرا

$$\mathtt{Q}^* \vdash \neg 1 + \bar{n} = \bar{n}$$

لذا با به کار بردن MP روی دو جمله قبل داریم:

$$\mathsf{Q}^* \vdash \neg(1+\bar{n})' = \bar{n}'$$

و از اینکه

$$\mathsf{Q}^* \vdash (1+\bar{n})' = (1+\bar{n}')$$

بنابراین

$$\mathsf{Q}^* \vdash \neg(1+\bar{n}') = \bar{n}'$$

همچنین می‌دانیم که $\mathsf{Q}^* \vdash \exists v_1(1+v_1 = v_1)$. بنابراین Q^* سازگار بوده ولی $\omega-$ناسازگار است. □

قضیه ۵.۳.۳. *اگر یک سیستم در ساختار اعداد طبیعی صدق کند، آنگاه $\omega-$ سازگار است.*

برهان. فرض کنید S سیستمی باشد که زبان آن شامل ارقام برای اعداد طبیعی باشد و در ساختار حساب صدق کند. فرض کنید $\mathsf{F}(w)$ فرمولی با یک متغیر آزاد باشد و $\mathsf{S} \vdash \exists w\mathsf{F}(w)$. بنابراین $\exists w\mathsf{F}(w)$ درست است، یعنی، عدد طبیعی n وجود دارد که $\mathsf{F}(\bar{n})$ درست است، این بیان می‌کند که $\neg\mathsf{F}(\bar{n})$ نادرست است و چون S یک دستگاه درست است، لذا $\mathsf{S} \nvdash \neg\mathsf{F}(\bar{n})$ و در نتیجه S، $\omega-$سازگار است. □

عکس این قضیه فقط برای جملات حداکثر تا Σ_2 در سلسله مراتب حسابی برقرار است.

قضیه ۶.۳.۳. *فرض کنید S، Σ_0-کامل و $\omega-$ سازگار باشد، آنگاه S، Σ_2- درست است.*

برهان. برای Σ_0-فرمول F فرض کنید $\mathsf{S} \vdash \exists v_1 \forall v_2 \mathsf{F}(v_1, v_2)$ و $\exists v_1 \forall v_2 \mathsf{F}(v_1, v_2)$ نادرست باشند، یعنی، عدد طبیعی n وجود ندارد به‌طوری‌که $\forall v_2 \mathsf{F}(\bar{n}, v_2)$ درست باشد، بنابراین برای هر عدد طبیعی n، $\forall v_2 \mathsf{F}(\bar{n}, v_2)$ نادرست است، لذا $\exists v_2 \neg\mathsf{F}(\bar{n}, v_2)$ درست است. آنگاه طبق Σ_1-کامل بودن S (یک نتیجه مقدماتی از Σ_0-کامل بودن)، برای هر n، $\mathsf{S} \vdash \exists v_2 \neg\mathsf{F}(\bar{n}, v_2)$، بنابراین برای هر n، $\mathsf{S} \vdash \neg\forall v_2 \mathsf{F}(\bar{n}, v_2)$. این با $\omega-$سازگاری S در تناقض است، پس $\exists v_1 \forall v_2 \mathsf{F}(v_1, v_2)$ درست است. □

نتیجه ۷.۳.۳. *اگر* S *،* Σ_0*–کامل و* ω*–سازگار باشد آنگاه* S *،* Σ_1*–درست است.*

برهان. فرض کنید $\exists v_1 \mathtt{H}(v_1)$ یک Σ_1– جمله باشد به‌طوری‌که $\mathsf{S} \vdash \exists v_1 \mathtt{H}(v_1)$، آنگاه

$$\mathsf{S} \vdash \exists v_1 \forall v_2 \big(v_2 = v_2 \to \mathtt{H}(v_1)\big)$$

حال طبق قضیه ۶.۳.۳،

$$\exists v_1 \forall v_2 \big(v_2 = v_2 \to \mathtt{H}(v_1)\big)$$

درست است، پس

$$\forall v_2 (v_2 = v_2) \to \exists v_1 \mathtt{H}(v_1)$$

درست است و چون $\forall v_2 (v_2 = v_2)$ درست می‌باشد لذا $\exists v_1 \mathtt{H}(v_1)$ درست است. □

گزاره ۸.۳.۳ (کرایسل ۱۹۵۵)**.** *یک سیستم* ω*–سازگار وجود دارد که یک* Σ_3*–جمله نادرست را اثبات می‌کند.*

برهان. فرض کنید $\mathtt{P}(v_1)$ فرمولی باشد که $\{n \ : \ \mathsf{PA} \vdash \mathtt{E}_n\}$ را نمایش می‌دهد. فرض کنید:

$$\mathtt{H}(x) =_{\mathtt{df}} \exists y \big(\mathtt{P}(\ulcorner \mathtt{E}_x \to \exists v_1 \mathtt{E}_y \urcorner) \land \forall z \mathtt{P}(\ulcorner \mathtt{E}_x \to \neg \mathtt{E}_y[z] \urcorner)\big)$$

فرمول $\mathtt{H}(x)$ را می‌توان به صورت یک فرمول در زبان PA نوشت. فرض کنید $\mathtt{K}$ یک جمله قطری برای $\mathtt{H}(x)$ باشد، یعنی، $(\mathtt{K} \equiv \mathtt{H}(\overline{\ulcorner \mathtt{K} \urcorner}))$. بنابراین $\mathtt{K}$ درست است اگروتنهااگر $\mathsf{PA} \cup \{\mathtt{K}\}$، ω– ناسازگار باشد. نشان می‌دهیم که $\mathsf{PA} \cup \{\mathtt{K}\}$، ω– سازگار است:
فرض کنید $\mathsf{PA} \cup \{\mathtt{K}\}$، ω– ناسازگار باشد. آنگاه $\mathtt{K}$ باید درست باشد، یعنی، زمانی که به PA اضافه می‌شود نتیجه آن یک سیستم ω–ناسازگار می‌باشد. اما چون PA درست است، لذا $\mathsf{PA} \cup \{\mathtt{K}\}$ باید درست باشد. اما هر نظریه‌ای که در اعداد طبیعی صدق کند ω–سازگار است، این با فرض ω–ناسازگاری $\mathsf{PA} \cup \{\mathtt{K}\}$ در تناقض است. بنابراین طبق برهان خلف $\mathsf{PA} \cup \{\mathtt{K}\}$ باید ω–سازگار باشد. بنابراین $\mathtt{K}$ نادرست است، یعنی، زمانی که به PA اضافه می‌شود نتیجه آن یک سیستم ω–ناسازگار می‌باشد که این یعنی $\mathsf{PA} \cup \{\mathtt{K}\}$ یک نظریه ω–سازگار نادرست است. نهایتا نشان می‌هیم که $\mathtt{K}$، Σ_3–جمله هست.

$$\mathtt{K} \equiv \exists y\big(\mathtt{P}(\ulcorner\mathtt{K} \to \exists v_1\mathtt{E}_y\urcorner) \wedge \forall z\mathtt{P}(\ulcorner\mathtt{K} \to \neg\mathtt{E}_y[z]\urcorner)\big)$$

حال طبق منطق محمولات داریم:

$$\mathtt{K} \equiv \exists y\forall z\big(\mathtt{P}(\ulcorner\mathtt{K} \to \exists v_1\mathtt{E}_y\urcorner) \wedge \mathtt{P}(\ulcorner\mathtt{K} \to \neg\mathtt{E}_y[z]\urcorner)\big)$$

محمول $\mathtt{P}(v_1)$، Σ_1 می‌باشد. بنابراین زمینه فرمول $\mathtt{K}$، وقتی که آن را به حالت نرمال پیشوندی می‌نویسیم دو سور وجودی کنار هم در محدوده $\exists\forall$ به دست می‌آید که می‌توانند به صورت یک سور وجودی تنها (همراه با یک سور عمومی بی‌کران) فشرده شود. نتیجه یک سور پیشوندی $\exists\forall\exists$ قبل از یک فرمول کران‌دار است؛ پس $\mathtt{K}$ یک Σ_1-فرمول است. □

گودل [۵] بیان می‌کند که مفهوم $\omega-$سازگاری «بسیار ضعیف‌تر» از فرض «درستی هر فرمول در تعبیر مورد نظر» می‌باشد، اما هیچ استدلالی برای این ادعا ارایه نمی‌دهد.

تذکر ۹.۳.۳. طبق گزاره ۸.۳.۳، $\omega-$سازگاری، درستی را نتیجه نمی‌دهد. اما به یک شکل ضعیف $\omega-$سازگاری، درستی را نتیجه می‌دهد و آن شکل بدین‌گونه است:

قضیه ۱۰.۳.۳. *حساب درست تنها توسیع $\omega-$سازگار از* PA *هست که شامل هر جمله و یا نقیض آن جمله باشد.*

برهان. قبلا دیدیم که هر نظریه که تمام نتایج منطقی آن در حساب درست‌اند، $\omega-$سازگار می‌باشد. بنابراین حساب درست $\omega-$سازگار است و البته شامل هر جمله و یا نقیض آن جمله می‌باشد. حال باید نشان دهیم که هر توسیع $\omega-$سازگار از PA که شامل هر جمله و یا نقیض آن جمله باشد، درست است. فرض کنیم S یک توسیع تمام از PA باشد، با استقرا روی تمام جملات $\mathtt{X}$ نشان می‌دهیم که S به درستی $\mathtt{X}$ را تصمیم‌گیری می‌کند (یعنی اگر $\mathtt{X}$ درست باشد آنگاه $\mathtt{S} \vdash \mathtt{X}$ و اگر $\mathtt{X}$ نادرست باشد آنگاه $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{X}$):

- شروع استقرا: $\mathtt{X}$ اتمی باشد. این مورد به سرعت از Σ_0-کامل بودن PA نتیجه می‌شود. زیرا اگر $\mathtt{X}$ درست باشد آنگاه $\mathtt{PA} \vdash \mathtt{X}$ و لذا $\mathtt{S} \vdash \mathtt{X}$ و اگر $\mathtt{X}$ نادرست باشد آنگاه $\neg\mathtt{X}$ درست خواهد بود و لذا $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{X}$.

• گام‌های استقرا:

۱. X به شکل $\neg Y$ یا به شکل $(Y \to Z)$ باشد و حکم برای Y و Z برقرار باشد:

– اگر X به شکل $\neg Y$ باشد در اینصورت با فرض درستی X نتیجه می‌شود که $\neg Y$ درست است و لذا Y نادرست است و طبق فرض استقرا $S \vdash \neg Y$ و این یعنی $S \vdash X$.
حال اگر فرض کنیم X نادرست است نتیجه می‌شود که $\neg Y$ نادرست است و لذا Y درست است و طبق فرض استقرا $S \vdash Y$ و این یعنی $S \vdash \neg X$.

– اگر X به شکل $Y \to Z$ باشد در اینصورت با فرض درستی X سه حالت ممکن است رخ داده باشد:
(الف) Y و Z هر دو درست باشند: در این حالت طبق فرض استقرا داریم: $S \vdash Y$ و $S \vdash Z$. از طرفی طبق منطق گزاره‌ها داریم:

$$S \vdash Z \to (Y \to Z)$$

و لذا با استفاده از قاعده وضع مقدم $S \vdash Y \to Z$ را خواهیم داشت و این یعنی $S \vdash X$.
(ب) Y و Z هر دو نادرست باشند: در این حالت طبق فرض استقرا داریم: $S \vdash \neg Y$ و $S \vdash \neg Z$. از طرفی طبق منطق گزاره‌ها داریم:

$$S \vdash \neg Y \to (\neg Z \to \neg Y)$$

و لذا با استفاده از قاعده وضع مقدم $S \vdash \neg Z \to \neg Y$ را خواهیم داشت و از طرفی طبق منطق گزاره‌ها داریم:

$$S \vdash (\neg Z \to \neg Y) \to (Y \to Z)$$

و با به کارگیری قاعده وضع مقدم نتیجه می‌شود که $S \vdash Y \to Z$ و این یعنی $S \vdash X$.
(پ) Y نادرست و Z درست باشد: در این حالت طبق فرض استقرا داریم:

$\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{Y}$ و $\mathtt{S} \vdash \mathtt{Z}$. از طرفی طبق منطق گزاره‌ها

$$\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{Y} \to (\neg\mathtt{Z} \to \neg\mathtt{Y})$$

و لذا با استفاده از قاعده وضع مقدم $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{Z} \to \neg\mathtt{Y}$ را خواهیم داشت و لذا $\mathtt{S} \vdash \mathtt{Y} \to \mathtt{Z}$ و این یعنی $\mathtt{S} \vdash \mathtt{X}$.

پس در هر حالت درستی $\mathtt{X}$، $\mathtt{S} \vdash \mathtt{X}$ را نتیجه می‌دهد.

اگر $\mathtt{X}$ نادرست باشد در اینصورت $\mathtt{Y}$ درست و $\mathtt{Z}$ نادرست خواهد بود و لذا

فرض استقرا	$\mathtt{S} \vdash \mathtt{Y}$
فرض استقرا	$\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{Z}$
منطق گزاره‌ها	$\mathtt{S} \vdash \mathtt{Y} \wedge \neg\mathtt{Z}$
منطق گزاره‌ها	$\mathtt{S} \vdash \neg(\neg\mathtt{Y} \vee \mathtt{Z})$
منطق گزاره‌ها	$\mathtt{S} \vdash \neg(\mathtt{Y} \to \mathtt{Z})$
	$\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{X}$

۲. $\mathtt{X}$ به شکل $\forall v_i \mathtt{F}(v_i)$ باشد. طبق فرض استقرا، $\mathtt{S}$ هر جمله به شکل $\mathtt{F}(\bar{m})$ را، به ازای هر عدد طبیعی m، به درستی تصمیم‌گیری می‌کند.

(آ) فرض کنید $\mathtt{X}$ درست باشد. آنگاه طبق فرض استقرا برای هر عدد طبیعی m، $\mathtt{S} \vdash \mathtt{F}(\bar{m})$. حال طبق کامل بودن $\mathtt{S}$، $\mathtt{S} \vdash \mathtt{X}$ و یا $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{X}$. فرض کنید $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{X}$، آنگاه $\mathtt{S} \vdash \exists v_i \neg\mathtt{F}(v_i)$. اما این با $\omega-$سازگار بودن $\mathtt{S}$ در تناقض هست. بنابراین $\mathtt{S} \vdash \mathtt{X}$.

(ب) فرض کنید $\mathtt{X}$ نادرست باشد. پس $\forall v_i \mathtt{F}(v_i)$ نادرست بوده و لذا $\exists v_i \neg\mathtt{F}(v_i)$ درست است و بنابراین عدد k وجود دارد که $\neg F(\bar{k})$ درست است. حال طبق فرض استقرا $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{F}(\bar{k})$. پس $\mathtt{S} \vdash \exists v_i \neg\mathtt{F}(v_i)$ و بنابراین $\mathtt{S} \vdash \neg\forall v_i \mathtt{F}(v_i)$ و در نتیجه $\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{X}$. □

تذکر ۱۱.۳.۳. یک دستگاه ω–سازگار و ناکامل می‌تواند به‌صورت ω– سازگار، به روش زیر، گسترش یابد.

قضیه ۱۲.۳.۳. *اگر* $\mathtt{S}$، ω–*سازگار باشد آنگاه برای هر جمله* $\mathtt{X}$ *در زبان* $\mathcal{L}(\mathtt{S})$ *یکی از* $\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}$ *یا* $\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$، ω–*سازگار خواهد بود.*

برهان. فرض کنید $\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}$ و $\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$ هر دو ω–ناسازگار باشند، بنابراین فرمول‌های $\mathtt{A}(x)$ و $\mathtt{B}(x)$ موجودند به‌طوری‌که

$$\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}\vdash \exists x\mathtt{A}(x) \tag{۷.۳}$$

و برای هر $n\in\omega$،

$$\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}\vdash \neg\mathtt{A}(\bar{n}) \tag{۸.۳}$$

و همچنین

$$\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}\vdash \exists x\mathtt{B}(x) \tag{۹.۳}$$

و برای هر $n\in\omega$،

$$\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}\vdash \neg\mathtt{B}(\bar{n}) \tag{۱۰.۳}$$

در اینصورت

$$\mathtt{S}\vdash \Big(\big(\mathtt{X}\wedge\exists x\mathtt{A}(x)\big)\vee\big(\neg\mathtt{X}\wedge\exists x\mathtt{B}(x)\big)\Big) \qquad \text{(۷.۳)، (۹.۳) ومنطق گزاره‌ای} \tag{۱۱.۳}$$

$$\mathtt{S}\vdash \exists x\Big(\big(\mathtt{X}\wedge\mathtt{A}(x)\big)\vee\big(\neg\mathtt{X}\wedge\mathtt{B}(x)\big)\Big) \qquad \text{(۱۱.۳) و منطق محمولات} \tag{۱۲.۳}$$

$$\mathtt{S}\vdash \Big(\big(\mathtt{X}\to\neg\mathtt{A}(\bar{n})\big)\wedge\big(\neg\mathtt{X}\to\neg\mathtt{B}(\bar{n})\big)\Big) \qquad \text{(۱۰.۳)} \tag{۱۳.۳}$$

$$\mathtt{S}\vdash \Big(\neg\big(\mathtt{X}\wedge\mathtt{A}(\bar{n})\big)\wedge\neg\big(\neg\mathtt{X}\wedge\mathtt{B}(\bar{n})\big)\Big) \qquad \text{(۱۳.۳) ومنطق گزاره‌ای} \tag{۱۴.۳}$$

$$\mathtt{S}\vdash \neg\Big(\big(\mathtt{X}\wedge\mathtt{A}(\bar{n})\big)\vee\big(\neg\mathtt{X}\wedge\mathtt{B}(\bar{n})\big)\Big) \qquad \text{(۱۴.۳) ومنطق گزاره‌ای} \tag{۱۵.۳}$$

(۱۲.۳) و (۱۵.۳)، ω– ناسازگاری $\mathtt{S}$ را نتیجه می‌دهند.
بنابراین نتیجه می‌گیریم که یا $\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}$ و یا $\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$ باید ω– سازگار باشد. □

تذکر ۱۳.۳.۳. خاصیت متناظر در قضیه ۱۲.۳.۳ برای سازگاری، از لم لیندنبائوم ناشی می‌شود. در نتیجه هر مجموعه سازگار می‌تواند به یک مجموعه سازگار که هر جمله یا نقیض آن جمله در آن رخ می‌دهد توسعه پیدا کند: با اعمال قضیه ۱۲.۳.۳ به ازای تمام جملات زبان، هر جمله یا نقیض آن جمله به نظریه اضافه می‌شود که سازگاری را حفظ می‌کند؛ اجتماع تمام این مراحل، یک مجموعه سازگار هست که شامل هر جمله یا نقیض آن جمله می‌باشد. طبق گزاره ۸.۳.۳ اینکه قضیه ۱۲.۳.۳ نتیجه دهد که هر مجموعه $\omega-$سازگار از جملات می‌تواند به مجموعه‌ای $\omega-$سازگار که شامل هر جمله و یا نقیض آن جمله هست توسعه یابد ممکن نیست. در برهان لم لیندنبائوم، اجتماع یک زنجیر از مجموعه‌های $\omega-$سازگار لزوما $\omega-$سازگار نمی‌باشد، یعنی، ممکن است اجتماع شامل یک $\omega-$ناسازگاری باشد (که یک مجموعه نامتناهی از جملات است) که این $\omega-$ناسازگاری در هیچ یک از اعضای زنجیر رخ نداده باشد (با در نظر گرفتن اینکه یک ناسازگاری در اجتماعی که متناهی باشد باید در یک عضو از زنجیر رخ دهد).

قضیه ۱۴.۳.۳. *با اضافه شدن یک Π_1-جمله درست $\mathtt{A}$ به دستگاه Σ_0-کامل S، $\omega-$سازگاری حفظ می‌شود.*

برهان. فرض کنید $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{A}\}$، $\omega-$ناسازگار باشد، یعنی، فرمول $\exists x\mathtt{B}(x)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathsf{S}\vdash\big(\mathtt{A}\to\exists x\mathtt{B}(x)\big)\tag{۱۶.۳}$$

و به ازای هر $n\in\omega$،

$$\mathsf{S}\vdash\big(\mathtt{A}\to\neg\mathtt{B}(\bar{n})\big)\tag{۱۷.۳}$$

و $\mathtt{A}$ به شکل $\forall x \mathtt{A}_0(x)$ می‌باشد که $\mathtt{A}_0(x)$، Σ_0 (با سورهای کران‌دار) هست. بنابراین

$$\mathsf{S} \vdash \big(\exists x \neg \mathtt{A}_0(x)\big) \vee \exists x \mathtt{B}(x) \qquad (۱۸.۳)$$

$$\mathsf{S} \vdash (\mathtt{A} \rightarrow (\mathtt{A} \wedge \exists x \mathtt{B}(x))) \qquad \text{(۱۶.۳) و منطق گزاره‌ای} \qquad (۱۹.۳)$$

$$\mathsf{S} \vdash \big(\exists x \neg \mathtt{A}_0(x)\big) \vee \big(\mathtt{A} \wedge \exists x \mathtt{B}(x)\big) \qquad \text{(۱۹.۳)، منطق گزاره‌ای و محمولات} \qquad (۲۰.۳)$$

$$\mathsf{S} \vdash \exists x \Big(\neg \mathtt{A}_0(x) \vee \big(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}(x)\big)\Big) \qquad \text{(۲۰.۳) ومنطق محمولات} \qquad (۲۱.۳)$$

حال چون $\forall x \mathtt{A}_0(x)$ درست است و S، Σ_0-کامل هست لذا برای هر $n \in \omega$،

$$\mathsf{S} \vdash \mathtt{A}_0(\bar{n}) \qquad (۲۲.۳)$$

و طبق (۱۷.۳) و (۲۲.۳) برای هر n داریم:

$$\mathsf{S} \vdash \big(\mathtt{A}_0(n) \wedge (\mathtt{A} \rightarrow \neg \mathtt{B}(\bar{n})\big) \qquad (۲۳.۳)$$

حال برای هر n طبق (۲۲.۳) و منطق گزاره‌ای داریم:

$$\mathsf{S} \vdash \neg \Big(\neg \mathtt{A}_0(\bar{n}) \vee \big(\mathtt{A} \wedge \mathtt{B}(\bar{n})\big)\Big) \qquad (۲۴.۳)$$

اما (۲۱.۳) و (۲۴.۳) نتیجه می‌دهند که S، $\omega-$ناسازگار است. بنابراین $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{A}\}$ باید $\omega-$سازگار باشد. □

نتیجه ۱۵.۳.۳. *اگر S، $\omega-$سازگار باشد آنگاه $\mathsf{S} \cup \{(\mathtt{Pr}(\overline{\ulcorner \neg \mathtt{G} \urcorner}) \rightarrow \neg \mathtt{G})\}$ نیز $\omega-$سازگار است.*

برهان. اگر S، $\omega-$سازگار باشد آنگاه $\neg \mathtt{Pr}(\overline{\ulcorner \neg \mathtt{G} \urcorner})$ یک Π_1-جمله درست است. بنابراین طبق قضیه قبل، اگر S، $\omega-$سازگار باشد $\{\neg \mathtt{Pr}(\overline{\ulcorner \neg \mathtt{G} \urcorner})\}$ $\mathsf{S} \cup$، $\omega-$سازگار خواهد بود. حال طبق منطق گزاره‌ای داریم:

$$\mathsf{S} \cup \{\neg \mathtt{Pr}(\overline{\ulcorner \neg \mathtt{G} \urcorner})\} \vdash (\mathtt{Pr}(\overline{\ulcorner \neg \mathtt{G} \urcorner}) \rightarrow \neg \mathtt{G}) \qquad (۲۵.۳)$$

پس اگر S، $\omega-$سازگار باشد آنگاه $\{(\mathtt{Pr}(\overline{\ulcorner \neg \mathtt{G} \urcorner}) \rightarrow \neg \mathtt{G})\}$ $\mathsf{S} \cup$ باید $\omega-$سازگار باشد. □

فصل ۴

مفهوم $n-$ سازگاری کرایسل

در این فصل مفهوم $n-$ سازگاری از نظر کرایسل[۱] [۶] بیان و ویژگی‌های آن مطالعه شده و رابطه بین $n-$ سازگاری و Σ_n- درستی مورد بررسی قرار گرفته است. مشاهده می‌شود که $1-$سازگاری شرطی اکیداً قوی‌تر از سازگاری $S \cup \{\mathtt{Con}_S\}$ است و این شرط لازم و کافی برای استقلال جمله گودل می‌باشد.

[۱] G. Kreisel

۱.۴ مفهوم 1 − سازگاری

مفهوم ω−سازگاری به‌طور قابل ملاحظه‌ای قوی‌تر از آن چیزی است که برای اثبات نیمه دوم قضیه اول ناتمامیت به آن نیاز داریم. از آن‌جایی که حسابی شده محمول اثبات برای یک سیستم شمارای کارآمد S، Σ_1 است، این نتیجه می‌تواند فقط با این فرض که هیچ ω− ناسازگاری به شکل Σ_1 وجود ندارد اثبات شود. این مفهوم ضعیف‌تر را 1− سازگاری می‌نامیم که تعریف دقیق آن به این شکل هست:

تعریف ۱.۱.۴ (1−سازگاری). یک دستگاه S در یک زبان که برای هر عدد طبیعی n شامل ترم بسته $\bar{n}$، نمایانگر عدد n، می‌باشد را 1− سازگار گوییم اگروتنهااگر Σ_1−فرمولی مانند $\exists v_i \mathrm{F}(v_i)$ با یک متغیر آزاد در زبان موجود نباشد به‌طوری‌که $\mathsf{S} \vdash \exists v_1 \mathrm{F}(v_1)$ و برای هر عدد طبیعی n، $\mathsf{S} \vdash \neg \mathrm{F}(\bar{n})$.

قضیه ۲.۱.۴. *برای یک دستگاه Σ_0−کامل S، 1− سازگاری S معادل با Σ_1−درستی S است.*

برهان. $\Leftarrow$: فرض کنید S، 1− سازگار باشد و فرض کنید $\exists v_i \mathrm{F}(v_i)$ یک Σ_1 −جمله باشد به‌طوری‌که $\mathsf{S} \vdash \exists v_i \mathrm{F}(v_i)$ و همچنین فرض کنید $\exists v_i \mathrm{F}(v_i)$ نادرست باشد. بنابراین $\forall v_i \neg \mathrm{F}(v_i)$ یک Π_1 − جمله درست است و لذا برای هر عدد n، $\neg \mathrm{F}(\bar{n})$ یک Σ_0 − جمله درست است. بنابراین طبق Σ_0 −کامل بودن S برای هر عدد طبیعی n، $\mathsf{S} \vdash \neg \mathrm{F}(\bar{n})$. اما این، فرض 1− سازگاری S را نقض می‌کند. در نتیجه $\exists v_i \mathrm{F}(v_i)$ درست است و S، Σ_1−درست می‌باشد.
$\Rightarrow$: فرض کنید S، Σ_1−درست باشد و $\mathsf{S} \vdash \exists v_i \mathrm{F}(v_i)$. در اینصورت طبق Σ_1−درستی S عدد طبیعی k وجود دارد که $\mathrm{F}(\bar{k})$ یک Σ_0−جمله درست است. حال از Σ_0−کامل بودن S نتیجه می‌شود که $\mathsf{S} \vdash \mathrm{F}(\bar{k})$. بنابراین $\mathsf{S} \nvdash \neg \mathrm{F}(\bar{k})$، در غیر اینصورت S ناسازگار خواهد بود و هر جمله‌ای را اثبات می‌کند به خصوص Σ_1−جملات نادرست را اثبات می‌کند که این با فرض Σ_1−درستی S در تناقض است. بنابراین S، 1− سازگار است. $\square$

قضیه ۳.۱.۴. *برای یک دستگاه Σ_0−کامل S، Σ_1−درستی S با سازگاری*

$$\mathsf{S}^{T}_{\Pi_1} := \mathsf{S} \cup \{\alpha \mid \text{یک } \Pi_1 \text{− جمله درست است } \alpha\}$$

معادل است.

برهان. $\Leftarrow$: فرض کنید $\mathtt{S}$، Σ_1–درست است و فرض کنید که

$$\mathtt{S}^T_{\Pi_1} = \mathtt{S} \cup \{\alpha \mid \alpha \text{ یک } \Pi_1- \text{جمله درست است}\}$$

ناسازگار باشد. از فرض Σ_1–درستی $\mathtt{S}$ سازگاری $\mathtt{S}$ نتیجه می‌شود. بنابراین اگر $\mathtt{S}^T_{\Pi_1}$ ناسازگار باشد آنگاه باید یک Π_1- جمله درست $\forall v_1 \mathtt{F}(v_1)$ موجود باشد به‌طوری‌که $\mathtt{S} \vdash \neg\forall v_1 \mathtt{F}(v_1)$. اما در اینصورت $\neg\forall v_1 \mathtt{F}(v_1) \equiv \exists v_1 \neg \mathtt{F}(v_1)$ یک Σ_1- جمله نادرست خواهد بود که این با Σ_1- درستی $\mathtt{S}$ در تناقض است. بنابراین $\mathtt{S}^T_{\Pi_1}$ سازگار است.

$\Rightarrow$: فرض کنید $\mathtt{S}^T_{\Pi_1}$ سازگار است و $\mathtt{S}$، Σ_1-درست نباشد. در اینصورت یک Σ_1-جمله نادرست $\exists v_1 \mathtt{H}(v_1)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathtt{S} \vdash \exists v_1 \mathtt{H}(v_1)$، و لذا $\mathtt{S} \vdash \neg\forall v_1 \neg \mathtt{H}(v_1)$، که در آن $\forall v_1 \neg \mathtt{H}(v_1)$ یک Π_1-جمله درست است. اما در اینصورت $\mathtt{S}^T_{\Pi_1}$ ناسازگار است. $\square$

قضیه ۴.۱.۴. *اگر* $\mathtt{S}$، $1-$*سازگار باشد آنگاه برای هر جمله* $\mathtt{X}$ در $\mathcal{L}(\mathtt{S})$ *یکی از* $\mathtt{S} \cup \{\mathtt{X}\}$ *یا* $\mathtt{S} \cup \{\neg\mathtt{X}\}$، $1-$*سازگار خواهد بود.*

برهان. ابتدا توجه داریم که اثبات نتیجه متناظر برای $\omega-$سازگاری نمی‌تواند این نتیجه را برای $1-$سازگاری برقرار کند زیرا فرمول

$$\exists x \Big(\big(\mathtt{X} \wedge \mathtt{A}(x)\big) \vee \big(\neg\mathtt{X} \wedge \mathtt{B}(x)\big)\Big)$$

برای Σ_0-فرمول‌های $\mathtt{A}(x)$ و $\mathtt{B}(x)$ به ازای یک جمله دلخواه $\mathtt{X}$، Σ_1 نیست. کرایسل یک اثبات متفاوت (نوشته شده طی نامه‌ای در ۳۱ مارس ۲۰۰۵) به شکل زیر را ارایه می‌دهد: فرض کنید $\mathtt{S} \cup \{\mathtt{X}\}$ و $\mathtt{S} \cup \{\neg\mathtt{X}\}$ هر دو $1-$ناسازگار باشند، بنابراین Σ_1-فرمول‌های $\exists x \mathtt{A}(x)$ و $\exists x \mathtt{B}(x)$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\mathtt{S} \cup \{\mathtt{X}\} \vdash \exists x \mathtt{A}(x) \qquad (۱.۴)$$

و برای هر $n \in \omega$،

$$\mathtt{S} \cup \{\mathtt{X}\} \vdash \neg \mathtt{A}(\bar{n}) \qquad (۲.۴)$$

و همچنین،

$$\mathtt{S} \cup \{\neg \mathtt{X}\} \vdash \exists x \mathtt{B}(x) \tag{۳.۴}$$

و برای هر $n \in \omega$،

$$\mathtt{S} \cup \{\neg \mathtt{X}\} \vdash \neg \mathtt{B}(\bar{n}) \tag{۴.۴}$$

همچنین طبق (۱.۴)، (۳.۴) و $\mathtt{S} \vdash (\mathtt{X} \vee \neg \mathtt{X})$ داریم:

$$\mathtt{S} \vdash \big(\exists x \mathtt{A}(x) \vee \exists x \mathtt{B}(x)\big) \tag{۵.۴}$$

و با توجه به (۵.۴) و منطق محمولات داریم:

$$\mathtt{S} \vdash \exists x \big(\mathtt{A}(x) \vee \mathtt{B}(x)\big) \tag{۶.۴}$$

حال ادعا داریم که برای هر $n \in \omega$، $\mathtt{S} \vdash \big(\neg \mathtt{A}(\bar{n}) \wedge \neg \mathtt{B}(\bar{n})\big)$. زیرا اگر چنین نباشد آنگاه برای برخی $n \in \omega$ داریم:

$$\mathtt{S} \nvdash \big(\neg \mathtt{A}(\bar{n}) \wedge \neg \mathtt{B}(\bar{n})\big) \tag{۷.۴}$$

اما $(\neg \mathtt{A}(\bar{n}) \wedge \neg \mathtt{B}(\bar{n}))$ یک Σ_0–جمله هست و $\mathtt{S}$، Σ_0–کامل می‌باشد، بنابراین

$$\mathtt{S} \vdash \big(\mathtt{A}(\bar{n}) \vee \mathtt{B}(\bar{n})\big) \tag{۸.۴}$$

حال از اینکه $\mathtt{S}$، Σ_0–درست می‌باشد $\mathtt{A}(\bar{n}) \vee \mathtt{B}(\bar{n})$ درست هست، بنابراین یا $\mathtt{A}(\bar{n})$ درست هست و یا $\mathtt{B}(\bar{n})$. بدون کاستن از کلیت فرض می‌کنیم $\mathtt{A}(\bar{n})$ درست هست. بنابراین طبق Σ_0–کامل بودن داریم:

$$\mathtt{S} \vdash \mathtt{A}(\bar{n}) \tag{۹.۴}$$

طبق (۲.۴) داریم:

$$\mathtt{S} \vdash \big(\mathtt{X} \rightarrow \neg \mathtt{A}(\bar{n})\big) \tag{۱۰.۴}$$

بنابراین از (۱۰.۴) و منطق گزاره‌ای داریم:

$$\mathsf{S} \vdash \big(\mathtt{A}(\bar{n}) \to \neg \mathtt{X}\big) \tag{۱۱.۴}$$

$$\mathsf{S} \vdash \neg \mathtt{X} \qquad MP \text{ و (۱۱.۴)، (۹.۴)} \tag{۱۲.۴}$$

اما طبق فرض‌های (۳.۴) و (۴.۴) داریم:

$$\text{برای هر } n \in \omega \text{ ، } S \vdash \neg \mathtt{B}(\bar{n}) \text{ و } \mathsf{S} \vdash \exists x \mathtt{B}(x) \tag{۱۳.۴}$$

از این رو S، 1–ناسازگار می‌باشد. بنابراین این ادعا که برای هر $n \in \omega$،

$$\mathsf{S} \vdash \big(\neg \mathtt{A}(\bar{n}) \wedge \neg \mathtt{B}(\bar{n})\big)$$

باید درست باشد. اما در اینصورت (۶.۴) مجددا 1–ناسازگاری S را نتیجه می‌دهد. بنابراین یا $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{X}\}$ و یا $\mathsf{S} \cup \{\neg \mathtt{X}\}$ باید 1–سازگار باشد. □

تذکر ۵.۱.۴. قضیه زیر در تناظر با قضیه ۱۰.۳.۳ برای ω–سازگاری قرار می‌گیرد:

قضیه ۶.۱.۴. *توسیع‌های 1–سازگار از PA غیر از حساب طبیعی وجود دارد که شامل هر جمله و یا نقیض آن جمله می‌باشد.*

برهان. توسیع ω–سازگار نادرست PA موجود در اثبات گزاره ۸.۳.۳، 1–سازگار می‌باشد. طبق قضیه ۴.۱.۴ و روش معمول تولید یک توسیع از یک مجموعه سازگار از جملات که شامل هر جمله یا نقیض آن جمله باشد (لم لیندنبائوم) یک توسیع کامل 1–سازگار به دست می‌آوریم. دلیل انجام این ساختار در مورد 1–سازگاری و انجام ندادن آن برای ω–سازگاری با توجه به تذکر ۱۳.۳.۳، این هست که طبق قضیه ۲.۱.۴، 1–سازگاری با Σ_1–درستی معادل می‌باشد و بنابراین اگر اجتماع زنجیره‌ای از مجموعه‌های 1–سازگار از جملات، 1–ناسازگار باشد آنگاه باید شامل یک Σ_1– جمله نادرست باشد. اما آن Σ_1– جمله نادرست باید در یکی از جملات مجموعه‌های زنجیره رخ دهد که در این مورد آن مجموعه جملات 1–ناسازگار خواهد بود و این با فرض موجود در تناقض است. □

تذکر ۷.۱.۴. مفهوم $1-$سازگاری به آسانی برای هر عدد طبیعی n به $n-$سازگاری تعمیم داده می‌شود، اما همانطور که خواهیم دید $n-$سازگاری تنها برای $n=1$ و $n=2$ یک مفهوم طبیعی هست.

۲.۴ مفهوم $2-$سازگاری

تعریف ۱.۲.۴ ($2-$سازگاری). یک دستگاه $\mathtt{S}$ در یک زبان را که برای هر عدد طبیعی n شامل ترم بسته $\bar{n}$، نمایانگر عدد n، می‌باشد را $2-$سازگار گوییم اگروتنهااگر هیچ Σ_2-فرمول $\exists v_1 \forall v_2 \mathtt{F}(v_1, v_2)$ در زبان $\mathtt{S}$ موجود نباشد به‌طوری‌که $\mathtt{S} \vdash \exists v_1 \forall v_2 \mathtt{F}(v_1, v_2)$ و برای هر عدد طبیعی n، $\mathtt{S} \vdash \neg\forall v_2 \mathtt{F}(\bar{n}, v_2)$.

قضیه ۲.۲.۴. *برای یک دستگاه Σ_0-کامل، $2-$سازگاری معادل با Σ_2-درستی است.*

برهان. $\Leftarrow$: فرض کنید $\mathtt{S}$، $2-$سازگار باشد و فرض کنید $\mathtt{S} \vdash \exists v_1 \forall v_2 \mathtt{F}(v_1, v_2)$، که در آن $\mathtt{F}(v_1, v_2)$ یک Σ_0-فرمول بوده و $\exists v_1 \forall v_2 \mathtt{F}(v_1, v_2)$ نادرست باشد که در اینصورت برای هر عدد طبیعی n، $\exists v_2 \neg\mathtt{F}(\bar{n}, v_2)$ یک Σ_1-جمله درست هست. حال طبق Σ_1-کامل بودن هر نظریه Σ_0-کامل، برای هر عدد طبیعی n، $\mathtt{S} \vdash \neg\forall v_2 \mathtt{F}(\bar{n}, v_2)$. اما در اینصورت $\mathtt{S}$، $2-$ناسازگار است و لذا $\exists v_1 \forall v_2 \mathtt{F}(v_1, v_2)$ درست است.

$\Rightarrow$: فرض کنید $\mathtt{S}$، Σ_2-درست باشد و فرض کنید $\mathtt{S} \vdash \exists v_1 \forall v_2 \mathtt{F}(v_1, v_2)$. این نتیجه می‌هد که $\exists v_1 \forall v_2 \mathtt{F}(v_1, v_2)$ درست است، بنابراین عدد طبیعی k وجود دارد که $\forall v_2 \mathtt{F}(\bar{k}, v_2)$ درست می‌باشد. فرض کنید $\mathtt{S} \vdash \neg\forall v_2 \mathtt{F}(\bar{k}, v_2)$، بنابراین $\mathtt{S} \vdash \exists v_2 \neg\mathtt{F}(\bar{k}, v_2)$. چون $\mathtt{S}$، Σ_2-درست است لذا $\mathtt{S}$، Σ_1-درست می‌باشد. بنابراین $\exists v_2 \neg\mathtt{F}(\bar{k}, v_2)$ درست می‌باشد. اما این با درستی $\forall v_2 \mathtt{F}(\bar{k}, v_2)$ در تناقض است، لذا طبق برهان خلف $\mathtt{S} \nvdash \neg\forall v_2 \mathtt{F}(\bar{k}, v_2)$. این یعنی $\mathtt{S}$، $2-$سازگار است. □

قضیه ۳.۲.۴. *برای یک دستگاه Σ_0-کامل $\mathtt{S}$، Σ_2-درستی $\mathtt{S}$ با سازگاری تمام Π_2-جملات درست $+\mathtt{S}$ معادل است.*

برهان. $\Leftarrow$: فرض کنید S، Σ_2–درست است و

$$\mathsf{S}^T_{\Pi_2} := \mathsf{S} \cup \{\alpha \mid \text{یک } \Pi_2\text{–جمله درست است } \alpha\}$$

ناسازگار باشد. چون S، Σ_2–درست است لذا S سازگار است. بنابراین ناسازگاری $\mathsf{S}^T_{\Pi_2}$ به این معنی است که یک Π_2–جمله درست $\forall v_1 \exists v_2 \mathtt{A}(v_1, v_2)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathsf{S} \vdash \neg \forall v_1 \exists v_2 \mathtt{A}(v_1, v_2)$$

اما در اینصورت

$$\mathsf{S} \vdash \exists v_1 \forall v_2 \neg \mathtt{A}(v_1, v_2)$$

و $\exists v_1 \forall v_2 \neg \mathtt{A}(v_1, v_2)$ یک Σ_2– جمله نادرست است، که با فرض Σ_2–درستی S در تناقض است.

$\Rightarrow$: فرض کنید $\mathsf{S}^T_{\Pi_2}$ سازگار باشد و S، Σ_2–درست نباشد، یعنی، یک Σ_2– جمله نادرست $\exists v_1 \forall v_2 \mathtt{B}(v_1, v_2)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathsf{S} \vdash \exists v_1 \forall v_2 \mathtt{B}(v_1, v_2)$$

بنابراین

$$\mathsf{S}^T_{\Pi_2} \vdash \exists v_1 \forall v_2 \mathtt{B}(v_1, v_2)$$

از اینکه $\exists v_1 \forall v_2 \mathtt{B}(v_1, v_2)$ نادرست است، $\forall v_1 \exists v_2 \neg \mathtt{B}(v_1, v_2)$ یک Π_2– جمله درست خواهد بود. لذا

$$\mathsf{S}^T_{\Pi_2} \vdash \forall v_1 \exists v_2 \neg \mathtt{B}(v_1, v_2)$$

بنابراین

$$\mathsf{S}^T_{\Pi_2} \vdash \neg \exists v_1 \forall v_2 \mathtt{B}(v_1, v_2)$$

درنتیجه $\mathsf{S}^T_{\Pi_2}$ ناسازگار است که فرض را نقض می‌کند. بنابراین S، Σ_2–درست است. $\square$

قضیه ۴.۲.۴. *اگر S، 2–سازگار باشد آنگاه برای هر جمله $\mathtt{X}$ در $\mathcal{L}(\mathsf{S})$، یا $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{X}\}$ و یا $\mathsf{S} \cup \{\neg \mathtt{X}\}$، 2–سازگار می‌باشد.*

برهان. (توسط کرایسل در ۷ آوریل ۲۰۰۵). چون S، $2-$سازگار است پس S، $1-$سازگار است و در نتیجه طبق قضیه ۴.۱.۴، یا $\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}$ و یا $\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$ $1-$سازگار است. دو حالت ممکن است رخ دهد: یا یکی و یا هر دوی آن‌ها توسیع‌های $1-$سازگار از S هستند مطابق زیر هر دو مورد را بررسی می‌کنیم:

- **یکی از آن‌ها $1-$ سازگار است:** بدون کاستن از کلیت مساله فرض می‌کنیم که $\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}$، $1-$ سازگار و $\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$، $1-$ ناسازگار هست. از $1-$ ناسازگاری $\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$ یک Σ_0- فرمول $\mathtt{B}_0(y)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}\vdash\exists y\mathtt{B}_0(y) \qquad (۱۴.۴)$$

و برای هر $n\in\omega$،

$$\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}\vdash\neg\mathtt{B}_0(\bar{n}) \qquad (۱۵.۴)$$

این مورد را $\star$ می‌نامیم.
حال دو حالت سازگاری و ناسازگاری $\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$ را بررسی می‌کنیم:

  - ابتدا فرض کنید که $\mathtt{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$ سازگار باشد. از (۱۴.۴) و (۱۵.۴) نتیجه می‌شود که $\exists y\mathtt{B}_0(y)$ فرمولی نادرست است پس $\neg\mathtt{B}_0(\bar{n})$ به ازای هر $n\in\omega$ درست است و بنابراین طبق Σ_1-کامل بودن برای هر $n\in\omega$ داریم $\mathtt{S}\vdash\neg\mathtt{B}_0(\bar{n})$. نشان می‌دهیم $\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}$، $2-$ سازگار است. فرض کنیم چنین نباشد، یعنی Σ_0- فرمول $\mathtt{A}_0(y,z)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}\vdash\exists y\forall z\mathtt{A}_0(y,z)$$

و برای هر $n\in\omega$،

$$\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}\vdash\exists z\neg\mathtt{A}_0(\bar{n},z)$$

این مورد را $\star\star$ می‌نامیم.
از اینکه $\mathtt{S}\cup\{\mathtt{X}\}$، $1-$ سازگار است لذا Σ_1- درست نیز می‌باشد، بنابراین

$\exists z\neg \mathtt{A}_0(\bar{n},z)$ درست است. لذا طبق Σ_1– کامل بودن S، $\mathsf{S}\vdash \neg\forall z\mathtt{A}_0(\bar{n},z)$.
بنابراین

$$\mathsf{S}\vdash \big(\neg\forall z\mathtt{A}_0(\bar{n},z)\wedge \neg\mathtt{B}_0(\bar{n})\big)$$

و لذا

$$\mathsf{S}\vdash \neg\big(\forall z\mathtt{A}_0(\bar{n},z)\vee \mathtt{B}_0(\bar{n})\big)$$

و در نتیجه

$$\mathsf{S}\vdash \neg\forall x\big(\mathtt{A}_0(\bar{n},x)\vee \mathtt{B}_0(\bar{n})\big)$$

اما طبق $\star$ و $\star\star$ داریم:

$$\mathsf{S}\vdash \big(\exists y\forall x\mathtt{A}_0(y,x)\vee \exists y\mathtt{B}_0(y)\big)$$

و لذا

$$\mathsf{S}\vdash \exists y\forall x\big(\mathtt{A}_0(y,x)\vee \mathtt{B}_0(y)\big)$$

که این Σ_2– ناسازگار بودن S را بیان می‌کند و فرض مساله را نقض می‌کند.

– حال فرض کنید که $\mathsf{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$ ناسازگار باشد، لذا $\mathsf{S}\vdash\mathtt{X}$ و بنابراین $\mathsf{S}=\mathsf{S}\cup\{\mathtt{X}\}$. در نتیجه اگر S، 2– سازگار باشد آنگاه بدیهی است که $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{X}\}$ نیز 2– سازگار است.

• $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{X}\}$ **و** $\mathsf{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$ **هر دو** 1– **سازگار هستند:** فرض کنید $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{X}\}$ و $\mathsf{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}$ هر دو 2–ناسازگار باشند، یعنی Σ_0–فرمول‌های $\mathtt{A}_0(y,z)$ و $\mathtt{B}_0(y,z)$ موجود هستند که

$$\mathsf{S}\cup\{\mathtt{X}\}\vdash \exists y\forall z\mathtt{A}_0(y,z) \tag{۱۶.۴}$$

$$\mathsf{S}\cup\{\mathtt{X}\}\vdash \neg\forall z\mathtt{A}_0(\bar{n},z) \quad \text{برای هر } n\in\omega \tag{۱۷.۴}$$

$$\mathsf{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}\vdash \exists y\forall z\mathtt{B}_0(y,z) \tag{۱۸.۴}$$

$$\mathsf{S}\cup\{\neg\mathtt{X}\}\vdash \neg\forall z\mathtt{B}_0(\bar{n},z) \quad \text{برای هر } n\in\omega \tag{۱۹.۴}$$

حال طبق (۱۶.۴) و (۱۸.۴) و با در نظر گرفتن $\mathsf{S}\vdash(\mathtt{X}\vee\neg\mathtt{X})$ داریم:

$$\mathsf{S}\vdash \big(\exists y\forall z\mathtt{A}_0(y,z)\vee \exists y\forall z\mathtt{B}_0(y,z)\big)$$

و همچنین
$$\mathsf{S} \vdash \exists y \forall u \big(\mathtt{A}_0(y,z) \vee \mathtt{B}_0(y,u)\big)$$
چون $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{X}\}$ و $\mathsf{S} \cup \{\neg\mathtt{X}\}$ هر دو $1-$ سازگار و بنابراین Σ_1- درست هستند لذا $\neg\forall z \mathtt{A}_0(\bar{n},z)$ و $\neg\forall z \mathtt{B}_0(\bar{n},z)$ هر دو درست هستند و چون S، Σ_0-کامل است پس
$$\mathsf{S} \vdash \neg\forall z \mathtt{A}_0(\bar{n},z)$$
$$\mathsf{S} \vdash \neg\forall z B_0(\bar{n},z)$$
و در نتیجه ترکیب عطفی آن‌ها نیز اثبات‌پذیر است:
$$\mathsf{S} \vdash \neg\forall z \mathtt{A}_0(\bar{n},z) \wedge \neg\forall z \mathtt{B}_0(\bar{n},z)$$
بنابراین
$$\mathsf{S} \vdash \neg\big(\forall z \mathtt{A}_0(\bar{n},z) \vee \forall z \mathtt{B}_0(\bar{n},z)\big)$$
پس
$$\mathsf{S} \vdash \neg\forall u \big(\mathtt{A}_0(\bar{n},z) \vee \mathtt{B}_0(\bar{n},u)\big)$$
و در اینصورت S، $2-$ناسازگار می‌باشد که با فرض مساله در تناقض است، بنابراین حداقل یکی از $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{X}\}$ یا $\mathsf{S} \cup \{\neg\mathtt{X}\}$، $2-$ سازگار است. □

۳.۴ ویژگی‌های $3-$ سازگاری

تذکر ۱.۳.۴. دیدیم که برای هر نظریه اصل‌بندی شده‌ی Σ_0-کامل S، به ازای $n = 1, 2$، $n-$ سازگاری S، Σ_n- درستی S و سازگاری
$$\mathsf{S}^T_{\Pi_n} := \mathsf{S} \cup \{\alpha \mid \text{یک } \Pi_n-\text{جمله درست است } \alpha\}$$
معادل هستند و به مفاهیم $1-$سازگاری و $2-$سازگاری محتوا بخشیدیم. مفاهیم $n-$سازگاری S، Σ_n- درستی S و سازگاری $\mathsf{S}^T_{\Pi_n}$ برای $n \geqslant 3$ نیز به طور جداگانه رخ می‌دهند.

قضیه ۲.۳.۴. *ویژگی‌های 3–سازگاری و Σ_3–درستی معادل هم نمی‌باشند.*

برهان. چون ω–سازگاری 3–سازگاری را نتیجه می‌دهد، پس با در نظر داشتن نظریه ساخته شده در گزاره ۸.۳.۳، که نظریه‌ای 3 – سازگار هست ولی Σ_3 – درست نیست، برهان تمام می‌شود. □

قضیه ۳.۳.۴. *ویژگی‌های 3– سازگاری یک سیستم S و سازگاری $\mathsf{S}^{T}_{\Pi_3}$ معادل هم نمی‌باشند.*

برهان. فرض کنید $\mathtt{K}$، Σ_3 – جمله نادرست ساخته شده در گزاره ۸.۳.۳ باشد. آنگاه $\neg\mathtt{K}$ یک Π_3 – جمله درست است که در این صورت

$$\mathsf{PA} \cup \{\mathtt{K}\} \cup \{\text{تمام } \Pi_3 - \text{جملات درست}\}$$

ناسازگار می‌باشد در حالی‌که $\mathsf{PA} \cup \{\mathtt{K}\}$، 3 – سازگار است. □

۴.۴ سازگاری، ω – سازگاری و n – سازگاری

وقتی گودل گفت که شرط ω–سازگاری در مقایسه با فرض درستی هر قضیه یک مفهوم «کاملا صوری» هست، او دقیقا درست می‌گفت اگر معنی آن «بیان‌شدنی در حساب نحوی» باشد، اما اگر معنی آن بیان‌شدنی در حساب متناهی باشد و حساب متناهی با حساب خالی از سور یا حساب کران‌دار (PRA)[۲] مشخص می‌شود، در اینصورت ω–سازگاری قابل بیان نمی‌باشد. این بخش نگاهی به چگونگی بیان مفاهیم سازگاری، ω–سازگاری، 1–سازگاری و 2–سازگاری در حساب نحوی می‌اندازد.

بیان سازگاری: سازگاری توسط یک Π_1 – جمله $\forall v_0 \neg \mathtt{Prov}(\overline{\ulcorner 0 = S(0) \urcorner}, v_0)$ بیان می‌شود که در آن $\mathtt{Prov}(v_1, v_2)$ یک Σ_0 – فرمول می‌باشد.

بیان ω–سازگاری: ویژگی ω–سازگاری Π_3 است، زمانی که ما تعریف ω–سازگاری را وارد حساب می‌کنیم: «فرمولی با یک متغیر آزاد مانند $\mathtt{F}(v_1)$ وجود ندارد به‌طوری‌که $\mathsf{S} \vdash \exists v_1 \mathtt{F}(v_1)$

[۲] Primitive recursive arithmetic

و برای هر $n \in \omega$، «$\mathtt{S} \vdash \neg\mathtt{F}(\bar{n})$». ویژگی موجود در عددگذاری گودل برای هر فرمول، Σ_0 است، گرچه این مورد کمی ظریف است: $\mathtt{F}$ یک فرمول است اگروتنهااگر یک ساختار دنباله‌ای موجود باشد که آن را تولید کند. در مواجهه با آن، این یک Σ_1 – ویژگی (شبیه اثبات‌پذیری) می‌باشد. اگرچه برخلاف اثبات‌پذیری یک محدودیت محاسبه‌پذیر روی طول ساختار دنباله‌ای وجود دارد؛ محاسبه‌پذیر برای آزمایش اینکه یک فرمول چنان هست یا نه. فرض کنید $\mathtt{Fm}_1(v_0)$ یک Σ_0 – محمول (یعنی فقط با سور کران‌دار) باشد به‌طوری‌که $\mathtt{Fm}_1(\bar{n})$ درست است اگروتنهااگر n عدد گودل یک فرمول با یک متغیر آزاد باشد. در اینصورت می‌توانیم ω– سازگاری را به صورت زیر بیان کنیم:

$$\neg\exists v_0\Big(\mathtt{Fm}_1(v_0) \wedge \exists v_1\mathtt{Prov}(\overline{\ulcorner\exists v_0\urcorner} * v_0, v_1) \wedge \forall v_2\exists v_3\mathtt{Prov}\big(\mathtt{s}(v_0,v_2),v_3\big)\Big)$$

$$\forall v_0\bigg(\mathtt{Fm}_1(v_0) \rightarrow \neg\Big(\exists v_1\mathtt{Prov}(\overline{\ulcorner\exists v_0\urcorner} * v_0, v_1) \wedge \forall v_2\exists v_3\mathtt{Prov}\big(\mathtt{s}(v_0,v_2),v_3\big)\Big)\bigg)$$

$$\forall v_0\bigg(\mathtt{Fm}_1(v_0) \rightarrow \Big(\forall v_1\neg\mathtt{Prov}(\overline{\ulcorner\exists v_0\urcorner} * v_0, v_1) \vee \exists v_2\forall v_3\neg\mathtt{Prov}\big(\mathtt{s}(v_0,v_2),v_3\big)\Big)\bigg)$$

$$\forall v_0\bigg(\mathtt{Fm}_1(v_0) \rightarrow \exists v_2\forall v_3\Big(\neg\mathtt{Prov}(\overline{\ulcorner\exists v_0\urcorner} * v_0, v_1) \vee \neg\mathtt{Prov}\big(\mathtt{s}(v_0,v_2),v_3\big)\Big)\bigg)$$

$$\forall v_0\exists v_2\forall v_1\forall v_3\bigg(\mathtt{Fm}_1(v_0) \rightarrow \Big(\neg\mathtt{Prov}(\overline{\ulcorner\exists v_0\urcorner} * v_0, v_1) \vee \neg\mathtt{Prov}\big(\mathtt{s}(v_0,v_2),v_3\big)\Big)\bigg)$$

در اینجا $\mathtt{s}(v_0,v)$ فرمولی است که با جایگذاری v به جای همه متغیرهای آزاد فرمولی با عدد گودل v_0 به‌دست می‌آید.

بیان 1 – سازگاری: برای بیان 1 – سازگاری یک نظریه سازگار $\mathtt{S}$، به گفتن «برای هر Σ_0 – فرمول $\mathtt{F}(v_0)$، اگر $\mathtt{S} \vdash \exists v_0\mathtt{F}(v_0)$، آنگاه عدد طبیعی $n \in \omega$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mathtt{S} \nvdash \neg\mathtt{F}(\bar{n})$» نیاز داریم.

اما طبق ویژگی Σ_0–کامل بودن $\mathtt{S}$، با توجه به درستی Σ_0– فرمول $\mathtt{F}(v_0)$ و سازگاری $\mathtt{S}$، این معادل است با: «برای هر Σ_0– فرمول $\mathtt{F}(v_0)$، اگر یک اثبات (در $\mathtt{S}$) برای $\exists v_0\mathtt{F}(v_0)$ موجود باشد آنگاه $n \in \omega$ وجود دارد به‌طوری‌که اثباتی (در $\mathtt{S}$) برای $\mathtt{F}(\bar{n})$ موجود می‌باشد».

فرض کنید $\Sigma_0\mathtt{Fm}_1(x)$ یک Σ_0–فرمول باشد به‌طوری‌که $\Sigma_0\mathtt{Fm}_1(x)$ درست است اگروتنهااگر $\mathtt{E}_x$ یک Σ_0– فرمول با یک متغیر آزاد باشد. در اینصورت Σ_1– درستی یا همان 1– سازگاری

می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\forall v_0 \forall v_1 \Big(\Sigma_0\mathtt{Fm}_1(x) \wedge \mathtt{Prov}(\overline{\ulcorner \exists v_0 \urcorner} * v_0, v_1) \to \exists v_2 \exists v_3 \mathtt{Prov}\big(\mathtt{s}(v_0, v_2), v_3\big) \Big)$$

که معادل است با

$$\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 \exists v_3 \Big(\Sigma_0\mathtt{Fm}_1(x) \wedge \mathtt{Prov}(\overline{\ulcorner \exists v_0 \urcorner} * v_0, v_1) \to \mathtt{Prov}\big(\mathtt{s}(v_0, v_2), v_3\big) \Big)$$

بنابراین Σ_1- درستی یا 1- سازگاری برای یک نظریه Σ_0-کامل توسط یک Π_2- جمله قابل بیان است.

بیان 2- سازگاری: برای بیان 2- سازگاری ما نیازمند گفتن این هستیم که: «برای هر Σ_0- فرمول $\mathtt{F}(v_0, v_1)$، اگر $\mathsf{S} \vdash \exists v_0 \forall v_1 \mathtt{F}(v_0, v_1)$، آنگاه عدد طبیعی n وجود دارد به‌طوری‌که $\mathsf{S} \nvdash \neg \forall v_1 \mathtt{F}(\bar{n}, v_1)$».

این یک Π_3- شرط به همان شیوه برای ω- سازگاری است، از آنجایی که معادله

$$\mathsf{S} \nvdash \neg \forall v_1 \mathtt{F}(\bar{n}, v_1) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{S} \vdash \forall v_1 \mathtt{F}(\bar{n}, v_1)$$

صحت ندارد. اگر S را سازگار در نظر بگیریم آنگاه

$$\mathsf{S} \vdash \forall v_1 \mathtt{F}(\bar{n}, v_1) \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{S} \nvdash \neg \forall v_1 \mathtt{F}(\bar{n}, v_1)$$

اما چون شرط سازگاری شامل ω- سازگاری نیست لذا داریم:

$$\mathsf{S} \nvdash \neg \forall v_1 \mathtt{F}(\bar{n}, v_1) \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{S} \vdash \forall v_1 \mathtt{F}(\bar{n}, v_1)$$

که یک شرط Π_1-کامل هست.

در مقابل، در مورد 1- سازگاری هم‌ارزی مورد نیاز به ازای Σ_0- فرمول $\mathtt{F}(v_0)$

$$\mathsf{S} \nvdash \neg \mathtt{F}(\bar{n}) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{S} \vdash \mathtt{F}(\bar{n})$$

می‌باشد که طبق Σ_0- کامل بودن و سازگاری برقرار است (مانند استدلال برای توجیه 1- سازگاری در بالا).

۵.۴ سازگاری $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{Con_S}\}$

با اینکه 1–سازگاری یک شرط بسیار ضعیف از ω–سازگاری است، اما همچنان از چیزی که لازم داریم قوی‌تر است. سازگاری $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{Con_S}\}$ یک شرط لازم و کافی برای برقراری $\mathsf{S}\nvdash\neg\mathtt{G}$ است که نتیجه‌ای از رابطه $\mathsf{S}\vdash(\mathtt{G}\equiv\mathtt{Con_S})$ می‌باشد و این رابطه از قضیه دوم ناتمامیت نتیجه می‌شود:

قضیه ۱.۵.۴. *فرض کنید $\mathtt{P}(v_1)$ یک محمول اثبات‌پذیر برای دستگاه S باشد و فرض کنید $\mathtt{G}$ یک جمله در زبان S باشد به‌طوری‌که $\mathsf{S}\vdash(\mathtt{G}\leftrightarrow\neg\mathtt{P}(\ulcorner\mathtt{G}\urcorner))$. فرض کنید $\mathtt{X}$ جمله‌ای باشد که $\mathsf{S}\vdash\neg\mathtt{X}$ و $\mathtt{Con_S}$ به $\neg\mathtt{P}(\ulcorner\mathtt{G}\urcorner)$ اطلاق شود. در اینصورت $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{Con_S}\}$ سازگار است اگروتنهااگر $\mathsf{S}\nvdash\neg\mathtt{G}$.*

برهان. طبق منطق گزاره‌ای، $\mathsf{S}\nvdash\neg\mathtt{G}$ اگروتنهااگر $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{G}\}$ سازگار باشد. طبق برهان قضیه دوم ناتمامیت $\mathsf{S}\vdash(\mathtt{G}\equiv\mathtt{Con_S})$ بنابراین $\mathsf{S}\nvdash\neg\mathtt{G}$ اگروتنهااگر $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{Con_S}\}$ سازگار باشد. □

حال فقط این مانده که نشان دهیم سازگاری $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{Con_S}\}$ اکیدا ضعیف‌تر از 1–سازگاری S است. اولا طبق قضیه ۳.۱.۴، 1–سازگاری S با سازگاری $\mathsf{S}^T_{\Pi_1}$ معادل می‌باشد و $\mathtt{Con_S}$ یک Π_1–جمله درست برای هر نظریه سازگار S است. اما این مشاهدات برهانی برای اینکه نشان دهد سازگاری $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{Con_S}\}$ اکیدا ضعیف‌تر از 1–سازگاری S هست، ایجاد نمی‌کند. ما این نتیجه را با ایجاد یک نظریه S برقرار می‌کنیم به‌طوری‌که اگر $\mathsf{PA}\cup\{\mathtt{Con_{PA}}\}$ سازگار باشد آنگاه S، 1–ناسازگار و $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{Con_S}\}$ سازگار باشد.

قضیه ۲.۵.۴. *فرض کنید $\mathsf{PA}^+ =_{\mathsf{df}} \mathsf{PA}\cup\{\mathtt{Con_{PA}}\}$ و $\mathsf{S} =_{\mathsf{df}} \mathsf{PA}\cup\{\neg\mathtt{Con_{PA^+}}\}$. اگر PA^+ سازگار باشد آنگاه S، 1–ناسازگار بوده و $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{Con_S}\}$ سازگار است.*

برهان. الف: اگر PA^+ سازگار باشد آنگاه $\mathtt{Con_{PA^+}}$ یک Π_1–جمله درست است، بنابراین $\neg\mathtt{Con_{PA^+}}$ یک Σ_1–جمله نادرست است. لذا طبق قضیه ۲.۱.۴، S، 1–ناسازگار است.

ب: ۱. فرض کنید $\mathsf{S}\cup\{\mathtt{Con_S}\}$ ناسازگار است.

۲. لذا طبق منطق گزاره‌ای $\mathsf{S} \vdash \neg\mathtt{Con}_{\mathsf{S}}$.

۳. به‌طور مشابه، S ناسازگار است اگروتنهااگر $\mathsf{PA} \vdash \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+}$ و بنابراین

۴. S ناسازگاری S را ثابت می‌کند اگروتنهااگر

$$\mathsf{S} \vdash \mathtt{Pr}_{\mathsf{PA}}(\overline{\ulcorner \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+} \urcorner})$$

اگروتنهااگر

$$\mathsf{PA} \cup \{\neg\mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+}\} \vdash \mathtt{Pr}_{\mathsf{PA}}(\overline{\ulcorner \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+} \urcorner})$$

۵. در اینصورت طبق قضیه استنتاج،

$$\mathsf{PA} \vdash \left(\neg\mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+} \to \mathtt{Pr}_{\mathsf{PA}}(\overline{\ulcorner \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+} \urcorner})\right)$$

۶. طبق عکس نقیض ۵ داریم:

$$\mathsf{PA} \vdash \left(\neg\mathtt{Pr}_{\mathsf{PA}}(\overline{\ulcorner \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+} \urcorner}) \to \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+}\right)$$

۷. با حسابی‌سازی قضیه دوم ناتمامیت،

$$\mathsf{PA} \vdash \left(\mathtt{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathtt{Pr}_{\mathsf{PA}}(\overline{\ulcorner \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}} \urcorner})\right)$$

۸. با حسابی‌سازی این حقیقت منطقی که اگر PA (یا هر نظریه دیگر) نتواند سازگاری خودش را اثبات کند آنگاه آن یک دلیل قوی‌تر هست که نمی‌تواند سازگاری یک توسیع از نظریه را نیز اثبات کند، خواهیم داشت:

$$\mathsf{PA} \vdash \left(\neg\mathtt{Pr}_{\mathsf{PA}}(\overline{\ulcorner \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}} \urcorner})\right) \to \left(\neg\mathtt{Pr}_{\mathsf{PA}}(\overline{\ulcorner \mathtt{Con}_{(\mathsf{PA}\cup\{\mathtt{Con}_{\mathsf{PA}}\})}})\right)$$

۹. از ۷، ۸ و قاعده تعدی داریم:

$$\mathsf{PA} \vdash \left(\mathtt{Con}_{\mathsf{PA}} \to \neg\mathtt{Pr}_{\mathsf{PA}}(\overline{\ulcorner \mathtt{Con}_{(\mathsf{PA}\cup\{\mathtt{Con}_{\mathsf{PA}}\})}})\right)$$

۱۰. از ۶، ۹ و قاعده تعدی داریم:

$$\mathsf{PA} \vdash (\mathtt{Con}_{\mathsf{PA}} \to \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+})$$

۱۱. حال طبق قاعده استنتاج داریم:

$$\mathsf{PA} \cup \{\mathtt{Con}_{\mathsf{PA}}\} \vdash \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+}$$

و این یعنی

$$\mathsf{PA}^+ \vdash \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+}$$

۱۲. حال طبق این فرض که $\mathsf{PA}^+ =_{\mathrm{df}} \mathsf{PA} \cup \{\mathtt{Con}_{\mathsf{PA}}\}$ سازگار است نتیجه می‌شود که

$$\mathsf{PA}^+ \nvdash \mathtt{Con}_{\mathsf{PA}^+}$$

یعنی قضیه دوم ناتمامیت برای PA^+.

۱۳. در نهایت با توجه به ۱، ۱۱، ۱۲ و برهان خلف $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{Con}_{\mathsf{S}}\}$ سازگار است. □

نتیجه ۳.۵.۴. *برای سیستم سازگار S که در قضیه دوم ناتمامیت گودل صدق می‌کند شرط سازگاری $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{Con}_{\mathsf{S}}\}$ اکیدا ضعیف‌تر از شرط $1-$ سازگاری S است.*

برهان. از آنجایی که $1-$سازگاری S با سازگاری $\mathsf{S}^T_{\Pi_1}$ معادل است و اینکه اگر S، $1-$سازگار باشد آنگاه $\mathtt{Con}_{\mathsf{S}}$ یک Π_1- جمله درست است لذا $1-$ سازگاری S سازگاری $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{Con}_{\mathsf{S}}\}$ را نتیجه می‌دهد. از طرفی، قضیه ۲.۵.۴ نشان می‌دهد که برای هر دستگاه S که در قضیه دوم ناتمامیت صدق می‌کند سازگاری $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{Con}_{\mathsf{S}}\}$، $1-$ سازگاری S را نتیجه نمی‌دهد. بنابراین سازگاری $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{Con}_{\mathsf{S}}\}$ یک شرط اکیدا ضعیف‌تر از $1-$سازگاری S است. □

تذکر ۴.۵.۴. هر چند سازگاری $\mathsf{S} \cup \{\mathtt{Con}_{\mathsf{S}}\}$ برای $\mathsf{S} \nvdash \neg\mathtt{G}$ لازم و کافی است، اما اثبات کافی بودن آن از طریق قضیه دوم ناتمامیت به دست می‌آید. برای یک اثبات از نیمه دوم قضیه اول ناتمامیت، بدون اثبات قضیه دوم ناتمامیت، اثبات با استفاده از $1-$سازگاری S بهترین راه ممکن هست.

مراجع

[1] Zofia Adamowicz & Paweł Zbierski, *Logic of mathematics: A Modern Course of Classical Logic, Wiley, (1997),* ISBN*: 9780471060260.*

[2] George Boolos, On “seeing” the truth of Gödel sentence, *Behavioral and Brain Sciences* 13:4 (1990) 655–656. DOI: 10.1017/S0140525X00080687. Also reprinted in: *Logic, Logic and Logic* (ISBN: 9780674537675), R. Jeffrey (ed.), Harvard University Press (1999), pp. 389–391.

[3] Herbert B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic*, Academic Press (2^{nd} ed. 2001), ISBN: 9780122384523.

[4] Solomon Feferman et al. (eds.), *Kurt Gödel Collected Works, Volume I: Publications 1929–1936* Oxford University Press (1986), ISBN: 9780195039641.

[5] Kurt Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der principia mathematica und verwandter Systeme, I., *Monatshefte für Mathematik und Physik* 38:1 (1931)173–198. DOI: 10.1007/BF01700692. Translated as On Formally Undecidable Propositions of *principia mathematica* and Related Systems, I.”, in [4] pp. 135–152.

[6] Daniel Isaacson, “Necessary and Sufficient Conditions for Undecidability of the Gödel Sentence and its Truth”, *Logic, Mathematics, Philosophy: Vintage Enthusiasms*, D. Devidi et al. (eds.), Springer (2011), pp. 135–152. DOI: 10.1007/978-94-007-0214-1_7.

[7] Stephen C.Kleene, Introduction to[5], in: [4], pp. 126–141.

[8] Elliott Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, (1st ed:D. van Nostrand Co. 1964 ISBN: 9780442053000), (2nd ed: D. van Nostrand Co. 1979 ISBN: 9780442053073), (3rd ed: The Wadsworth & Brooks/Cole 1987 ISBN: 9781461572909), (4th ed:. Chapman & Hall 1997 ISBN: 9780412808302), (5th ed: CRC Press 2009 ISBN: 9781584888765), (6th ed: CRC Press 2015 ISBN: 9781482237726).

[9] Roger Penrose, *The Emperor’s New Mind: concerning computers, minds, and the lows of physics*, Oxford University Press (1989 ISBN: 9780198519737), (revised: 2016 ISBN: 9780198784920).

[10] Peter Smith, *An Introduction to Gödel’s Theorems*, Cambridge University Press (1st ed. 2007 ISBN: 9780521857840), (2nd ed. 2013 ISBN: 9781107606753).

[۱۱] اردشیر، محمد؛ *منطق ریاضی*؛ انتشارات هرمس، ویراست دوم.

[۱۲] قیوم‌زاده، کامران؛ قضیه ناتمامیت گودل و فلسفه ذهن؛ *منطق پژوهی، سال اول، شماره دوم، ۱۳۸۹*، ص ۱۰۵-۱۰۳.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اصل موضوع .... Axiom
اصل‌بندی شده .... Axiomatized
اصل‌پذیری .... Axiomatizability
اندازه‌پذیر .... Measurable
اثبات‌پذیر .... Provable
استقرا .... Induction
استقرای قوی .... Meta-induction
استقلال .... Independence
استنتاج .... Deduction
$\omega-$ سازگاری .... ω-consistency
بازگشتی .... Recursively
برهان .... Proof
پارادوکس .... Paradox
پارادوکس دروغ‌گو .... Liar paradox
پارادوکس راسل .... Russell's paradox
پارادوکس ریچارد .... Richard's paradox
Π_n- درست .... Π_n-sound
Π_n- کامل .... Π_n-complete

PA – اثبات‌ناپذیری	PA-unprovability
تالی	Successor
تصمیم‌پذیر	Decidable
تصمیم‌پذیری	Decidability
تصمیم‌ناپذیری	Undecidability
تظریف	Refinement
تعبیر، تعبیر کردن	Interpret
تعریف‌پذیر	Definable
تعمیم	Generalization
تمامیت	Completeness
تناقض	Contradiction
توسیع	Extension
T – اثبات‌ناپذیری	T-unprovability
ثابت	Constant
جانشینی	Substitution
جمله	Sentence
جمله گودل	Gödel sentence
حساب	Arithmetic
حساب پئانو	Peano arithmetic
خالی از سور	Quantifier-free
خودارجاعی	Self-referential
درست	Sound
درست	True
درستی	Truth
دستگاه	System

ردپذیر .... Refutable

ZF – اثبات‌ناپذیر .... ZF-unprovable

ساختار .... Structure

سازگار .... Consistent

سازگاری .... Consistency

سلسله مراتب .... Hierarchy

سور .... Quantifier

Σ_n – درست .... Σ_n-sound

Σ_n – کامل .... Σ_n-complete

صحت، درستی .... Soundness

صوری .... Formall

عدد ترتیبی .... Ordinal

عدد گودل .... Gödel number

عکس نقیض .... Contrapositive

غیرالگوریتمی .... Nonalgorithmic

غیرقابل مقایسه .... Incomparable

فرمول .... Formula

قاعده .... Rule

قضیه گودل .... Gödel's theorem

قطری‌سازی .... Diagonalization

کاردینال .... Cardinal

کامل .... Complete

کران‌دار .... Bounded

گزاره‌ای .... Propositional

متغیر .... Varible

مجموعه مندلبورت .... Mandelbort set
محاسبه‌پذیر .... Computable
محمول .... Predicate
ناتمامیت .... Incompleteness
ناسازگاری .... Inconsistent
نحو .... Syntax
نظریّه .... Theory
نقیض .... Negation
وجودی .... Existential
هم‌ارز .... Equivalent
یک متغیره .... One-place

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

حساب	Arithmetic
اصل موضوع	Axiom
اصل‌پذیری	Axiomatizability
اصل‌بندی شده	Axiomatized
کران‌دار	Bounded
کاردینال	Cardinal
کامل	Complete
تمامیت	Completeness
محاسبه‌پذیر	Computable
ثابت	Constant
سازگاری	Consistency
سازگار	Consistent
تناقض	Contradiction
عکس نقیض	Contrapositive
تصمیم‌پذیری	Decidability
تصمیم‌پذیر	Decidable
استنتاج	Deduction
تعریف‌پذیر	Definable

قطری‌سازی .... Diagonalization
هم‌ارز .... Equivalent
وجودی .... Existential
توسیع .... Extension
صوری .... Formall
فرمول .... Formula
تعمیم .... Generalization
جمله گودل .... Gödel sentence
عدد گودل .... Gödel number
قضیه گودل .... Gödel's theorem
سلسله مراتب .... Hierarchy
غیرقابل مقایسه .... Incomparable
ناتمامیت .... Incompleteness
ناسازگاری .... Inconsistent
استقلال .... Independence
استقرا .... Induction
تعبیر، تعبیر کردن .... Interpret
پارادوکس دروغ‌گو .... Liar paradox
مجموعه مندلبورت .... Mandelbort set
اندازه‌پذیر .... Measurable
استقرای قوی .... Meta-induction
نقیض .... Negation
غیرالگوریتمی .... Nonalgorithmic
عدد ترتیبی .... Ordinal
ω– سازگاری .... ω-consistency

One-place .... یک متغیره
PA-unprovability .... PA – اثبات‌ناپذیری
Paradox .... پارادوکس
Peano arithmetic .... حساب پئانو
Predicate .... محمول
Proof .... برهان
Propositional .... گزاره‌ای
Provable .... اثبات‌پذیر
Π_n-complete .... Π_n – کامل
Π_n-sound .... Π_n – درست
Quantifier .... سور
Quantifier-free .... خالی از سور
Recursively .... بازگشتی
Refinement .... تظریف
Refutable .... ردپذیر
Richard's paradox .... پارادوکس ریچارد
Rule .... قاعده
Russell's paradox .... پارادوکس راسل
Sentence .... جمله
Self-referential .... خودارجاعی
Σ_n-complete .... Σ_n – کامل
Σ_n-sound .... Σ_n – درست
Sound .... درست
Soundness .... صحت، درستی
Structure .... ساختار

جانشینی .... Substitution

تالی .... Successor

نحو .... Syntax

دستگاه .... System

T – اثبات‌ناپذیری .... T-unprovability

نظریّه .... Theory

درست .... True

درستی .... Truth

تصمیم‌ناپذیری .... Undecidability

متغیر .... Varible

ZF – اثبات‌ناپذیر .... ZF-unprovable

Surname: Nobakht	**Name:** Yusef

Title: Necessary and Sufficient Conditions for Undecidability of the Gödel Sentence and its Truth

Supervisor: Dr. Saeed Salehi

Advisor: Dr. Hazhir Homei

Degree: Master of Science	**Subject:** PURE MATHEMATICS	
Field: Mathematical Logic	**University of Tabriz**	
Faculty of Mathematical Sciences	**Date:** 2018	**Number of Pages:** 65

Keywords: Undecidability, Gödel Sentence, Consistency, Completeness, Soundness,ω-consistency, n-consistency

Abstract

In this thesis, the relationship between soundness, ω-consistency, 1-consistency and conditions intermediate between them are analyzed. It is observed that a necessary and sufficient condition for the independence of the Gödel sentence from the theory is the consistency ot that theory with its consistency statement. This condition is strictly weaker than 1-consistency. Also, the basis on which the truth of the Gödel sentences can be seen, are discussed.

University of Tabriz

Faculty of Mathematical Sciences

DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS

FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS

Necessary and Sufficient Conditions for Undecidability of the Gödel Sentence and its Truth

Supervisor

Dr. Saeed Salehi

Advisor

Dr. Hazhir Homei

By

Yusef Nobakht

2018